

## ОЧЕРЕДНОЕ БАЛОВСТВО С ФОРМУЛАМИ

В процессе подготовки разборов задач для школьников как-то непроизвольно обращаешь внимание на возможность сделать ряд дополнительных выводов на основании используемых рассуждений, выкладок и результатов. Так было, например, в случае «Размышлений о скругленности и угловатости»\*, затрагивающих группу сходных упражнений по геометрии. Вот и в этот раз оказалось, что из нескольких заданий по алгебре можно вывести ряд своеобразных соотношений.

В задании А-57 выполнялось построение графика функции  $y = \cos(\arcsin(\sin x))$  (рис. 1).

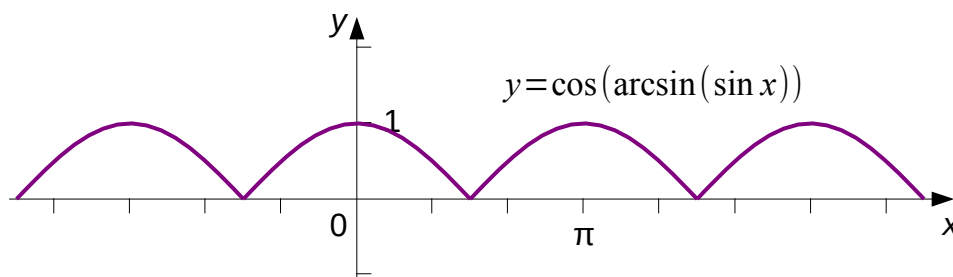


Рис. 1.

Обращает на себя внимание, что он полностью совпадает с графиком функции  $y = |\cos x|$ , который можно получить из косинусоиды, если все её точки, лежащие ниже оси абсцисс, зеркально отразить в верхнюю полуплоскость. На основании этого можно записать:

$$\cos(\arcsin(\sin x)) = |\cos x| \quad (1)$$

Используя основное тригонометрическое тождество

$$|\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

и вводя обозначение  $t = \sin x$  получаем:

$$\cos(\arcsin t) = \sqrt{1 - t^2} \quad (2)$$

Как известно, производная функции арксинус выражается так:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Из соотношения (2) следует, что её можно записать иначе:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \quad (3)$$

Если теперь обратиться к результату, полученному в задании А-58 (рис. 2), то нетрудно убедиться, что графики  $y = \sin(\arccos(\cos x))$  и  $y = |\sin x|$  также совпадают, свидетельствуя о справедливости равенства

$$\sin(\arccos(\cos x)) = |\sin x|, \quad (4)$$

которое с учётом того, что

$$|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

даёт выражение, аналогичное (2):

$$\sin(\arccos t) = \sqrt{1 - t^2}, \quad (5)$$

\* URL: <https://shurichimik.narod.ru/consideration/48-polyhedron/48-polyhedron.htm>.

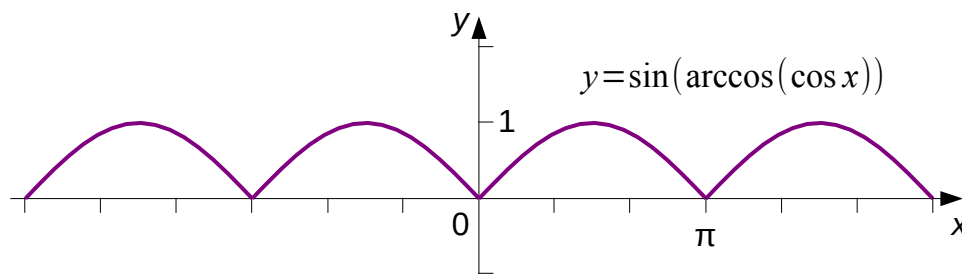


Рис. 2.

Трудно не заметить, что одинаковость правых частей (2) и (5) приводит к тождеству, справедливость которого при  $t \in [-1; 1]$  доказывалось в разборе задания А-56:

$$\cos(\arcsin t) = \sin(\arccos t) \quad (6)$$

Поскольку  $(\arccos x)' = -(\arcsin x)'$ , то соотношение (5) позволяет также записать выражение для производной функции арккосинус в виде

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} \quad (7)$$

С учётом (6) возможны и такие варианты:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin(\arccos x)} \quad (8)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\cos(\arcsin x)} \quad (9)$$

Из рис. 1, 2 видно, что линии графиков обеих функций одинаковы, и один получается из другого смещением на  $\frac{\pi}{2}$  по оси абсцисс. Из этого следует, что будет выполняться ещё и такое равенство:

$$\cos(\arcsin(\sin x)) = \sin\left(\arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right),$$

которое после приведения и замены  $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x = t$  оказывается тождеством (6).

© Широков Александр, 23.01.2025