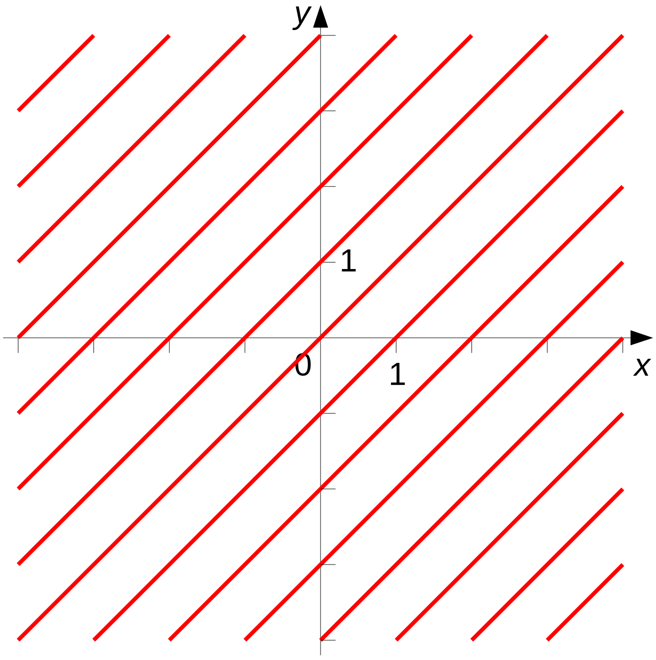
О взаимосвязи тригонометрических функций и функции дробной части числа

Тот, кто хорошо помнит школьную математику, легко сможет назвать функции, обладающие свойством периодичности – синус, косинус, тангенс и котангенс. Некоторые, возможно, припомнят, что ещё есть секанс и косеканс.

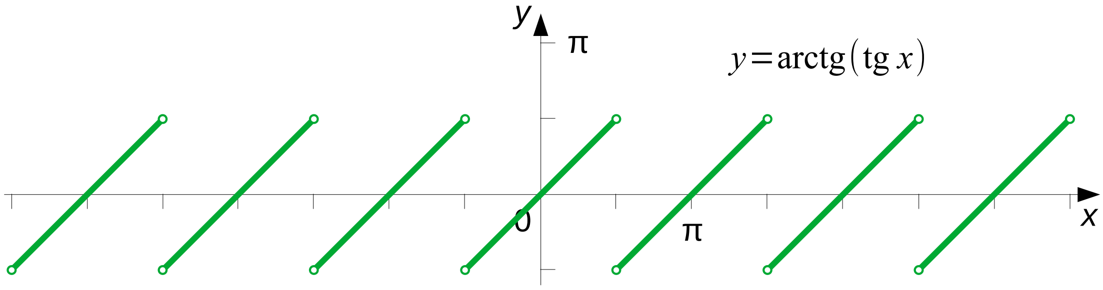
Существует, однако, функция, тоже обладающая периодичностью, но к тригонометрическим, как перечисленные выше, не относящаяся. Про неё иногда школьникам рассказывают на уроках – это дробная часть числа $y = \{x\}$. Я некоторое время назад «игрался» с этой функцией, получив в итоге целую россыпь интересных (ну, по крайней мере, мне они таковыми кажутся) упражнений для школьников, которые опубликованы на сайте и дзен-канале. При этом сложно было не подметить некоторую взаимосвязь $\{x\}$ с тригонометрией, вполне отчётливо проявившуюся в некоторых случаях. О них далее и пойдёт речь.

Из разборов задач А-26 и А-29 следует, что уравнения $\{y\} - \{x\} = 0$ и $\sin(\pi y - \pi x) = 0$ имеют одинаковые графики, то есть – совпадающие множества решений и потому равносильны друг другу:

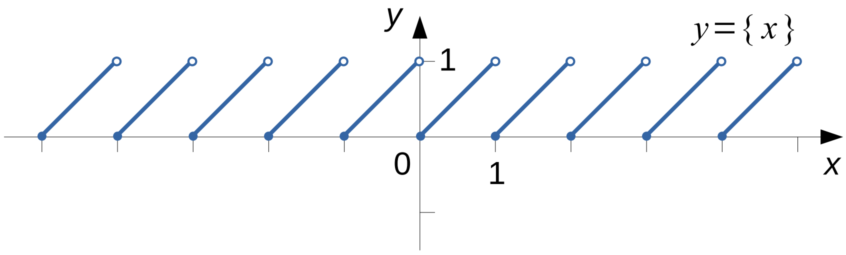


$$\{y\} - \{x\} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin(\pi y - \pi x) = 0$$

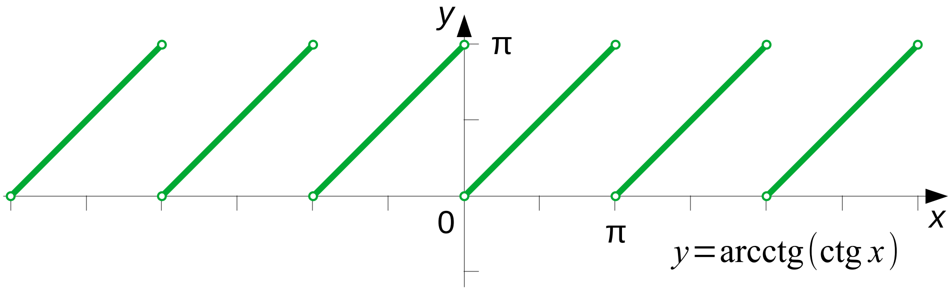
Согласен, что совпадение множеств решений не так много значит (например, уравнения $x^2 = 0$ и $\ln(x + 1) = 0$ тоже имеют одинаковый корень $x = 0$). Однако выявлены ситуации, когда $\{x\}$ оказывается увязанным с тригонометрией непосредственно в одном равенстве. Так, в задаче А-33 был построен график функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$:



Здесь вполне просматривается похожесть его на график функции дробной части числа, изображение которого на координатной плоскости разбиралось в упражнении А-17:



В комментарии к А-33 был показан график y = arcctg(ctg x), обладающий ещё большим сходством:



Для усиления похожести его несложно модифицировать:

1) «Сжать» график y = arcctg(ctg x) по вертикали (в направлении оси ординат) в π раз:

$$y_1=\frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$$

2) «Сжать» по горизонтали (в направлении оси абсцисс), тоже в π раз:

$$y_2=\frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(\pi x))$$

Получившаяся функция почти полностью совпадает с $y = \{x\}$ за исключением целых значений аргумента, при которых $y_2(x)$ не определена (на её графике будут «проколы» в этих точках), а функция дробной части равна нулю. Иными словами, если $x \notin \mathbb{Z}$, то выполняется равенство:

$$\{x\}=\frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(\pi x)) \qquad (1)$$

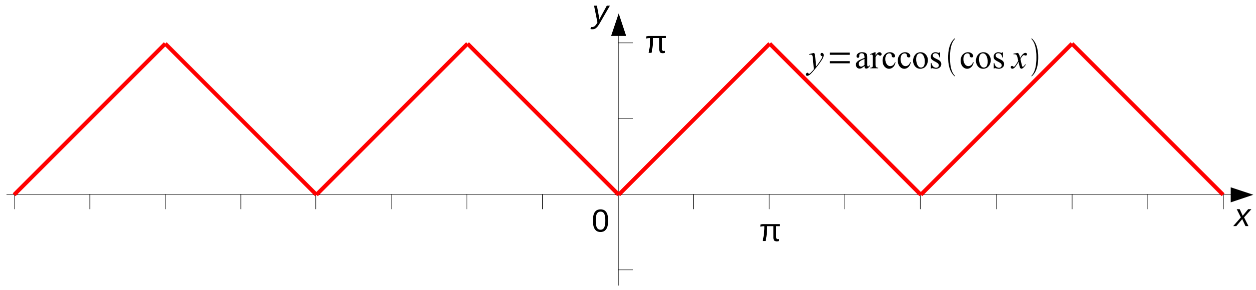
Данную ситуацию, кстати, легко исправить, доопределив $y_2(x)$ следующим образом:

$$y_3=\begin{cases}0, \text{ если } x\in\mathbb{Z}\\ \frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(\pi x)), \text{ если } x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

Приведённый способ записи с фигурной скобкой вполне общепринят, хотя мне представляется, что в более строгой форме это будет запись в виде объединения двух систем, между которым и выражением функции дробной части числа можно поставить знак равносильности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\notin\mathbb{Z}\\ y=\frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(\pi x))\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow y = \{x\}$$

Равенство, когда дробная часть числа выражена через арккотангенс от котангенса справедливо с определёнными оговорками, но мне удалось обнаружить соотношения, такими ограничениями не отягощённые. В задаче А-32 был построен график функции y = arccos(cos x):



Выполним с ним следующие преобразования.

1. «Сожмём» график $y = \arccos(\cos x)$ по вертикали (вдоль оси ординат) в 2π раз:

$$y_1 = \frac{1}{2\pi}\cdot\arccos(\cos x)$$

2. График y_1 тоже «сожмём» в 2π раз, но уже по горизонтали (вдоль оси абсцисс):

$$y_2 = \frac{1}{2\pi}\cdot\arccos(\cos(2\pi x))$$

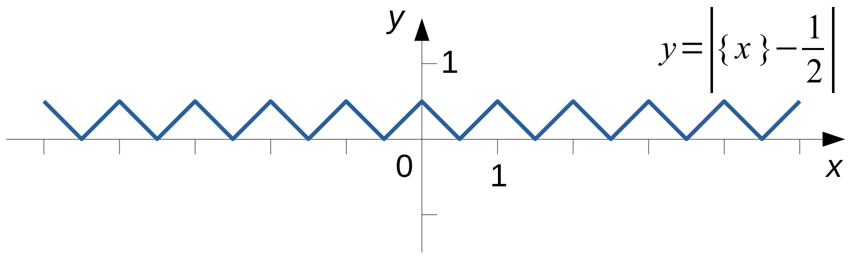
3. «Перевернём» график y_2 умножением на -1:

$$y_3 = -\frac{1}{2\pi}\cdot\arccos(\cos(2\pi x))$$

4. «Поднимем» график y_3 вверх добавлением к нему половины единицы:

$$y_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\cdot\arccos(\cos(2\pi x))$$

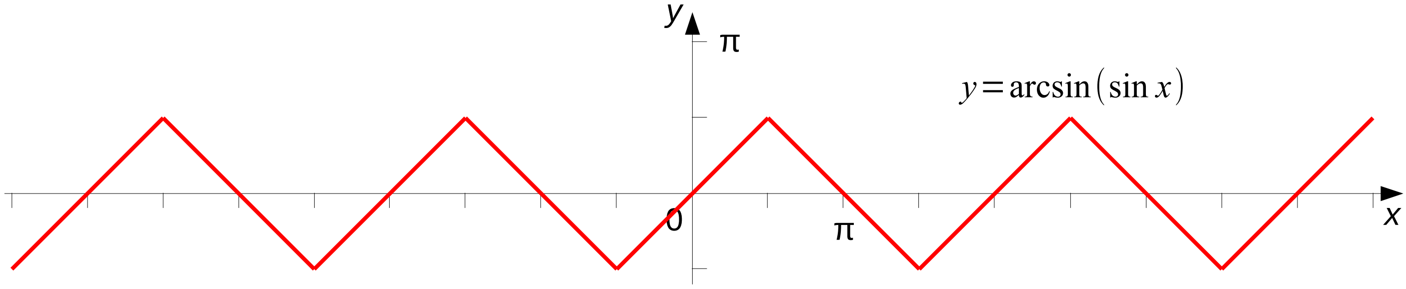
В итоге получится ломаная линия, полностью совпадающая с графиком функции $y = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$ (см. ответ к задаче А-17):



Выходит, что $\forall\, x \in \mathbb{R}$ имеет место вот такое необычное равенство:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\cdot\arccos(\cos(2\pi x)) = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right| \qquad (2)$$

Ещё более мудрёное соотношение можно получить из графика функции $\arcsin(\sin x)$ (см. упражнение А-31):



1. «Сожмём» график $y = \arcsin(\sin x)$ в горизонтальном направлении в π раз:

$$y_1 = \arcsin(\sin(\pi x))$$

2. «Сожмём» график y_1 в вертикальном направлении в π раз:

$$y_2 = \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin(\sin(\pi x))$$

3. Точки графика y_2, лежащие ниже оси абсцисс, «отразим» в верхнюю полуплоскость при помощи модуля:

$$y_3 = \frac{1}{\pi} \cdot |\arcsin(\sin(\pi x))|$$

4. «Перевернём» график умножением y_3 на –1, а затем то, что получилось, «поднимем» вверх на половину единицы:

$$y_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot |\arcsin(\sin(\pi x))|$$

График y_4 полностью совпадает с графиком $y = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$, поэтому можно заключить, что для всех действительных x справедливо выражение:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot |\arcsin(\sin(\pi x))| = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right| \qquad (3)$$

Из одинаковости правых частей (2) и (3) вытекает, что если приравнять левые их части, то после упрощения можно получить ещё одно соотношение ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\arccos(\cos 2\alpha) = 2 \cdot |\arcsin(\sin \alpha)|$$

Затрудняюсь сказать, тянет ли на полноценное строгое доказательство справедливости (1), (2) и (3) факт совпадения графиков функций, но как такое можно выполнить иначе, у меня идей нет, вместо них в наличии лишь сомнения в достаточности собственных знаний по математике для этого.

В заключение заметки стоит вспомнить и об открытости вопроса практической пригодности выведенных формул – подозреваю, что здесь, как и в случае с «параметром круглости»*, имеет место лишь мозговая гимнастика, обобщающая результаты группы школьных задач.

* См. заметку «Размышления о скругленности и угловатости» (URL: http://shurichimik.narod.ru/consideration/48-polyhedron/48-polyhedron.htm).