Школьные задачи / Алгебра / А-69

Найти значение интеграла

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+|x|\cdot(|\,|x|-1\,|-1)}\,dx$$

Решение

Здесь не получится воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница, поскольку отыскать у стоящей под интегралом функции выражение её первообразной будет, мягко говоря, затруднительно. Для решения задачи нужно отталкиваться от геометрического смысла определённого интеграла, который равен площади фигуры, ограниченной графиком подынтегральной функции и осью абсцисс, а также вертикальными линиями, соответствующими нижнему и верхнему пределам интегрирования.

В задании А-65 выполнялось построение графика функции

$$y(x) = \sqrt{1+|x|\cdot(|\,|x|-1\,|-1)}$$

и было установлено, что он при $x \geqslant 1$ совпадает с графиком линейной функции $y = x - 1$. Когда $x \leqslant -1$, то выражение $y(x)$ совпадает с $y = -x - 1$, график которой также представляет прямую линию. В случае же для $-1 < x < 1$ функция $y(x)$ описывает «верхнюю» половину окружности с центром в начале координат и радиусом, равным единице (рис. 1).

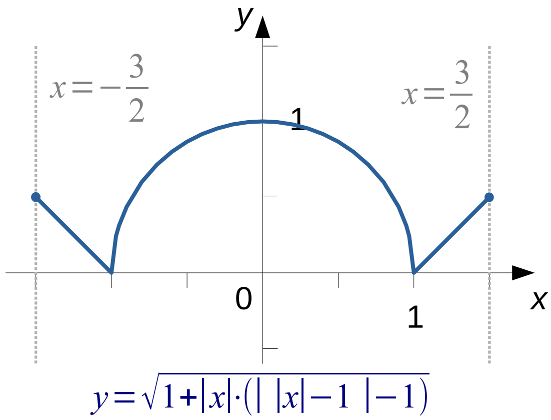

Рис. 1.

Обозначим искомое значение интеграла как I. Из рис. 1 видно, что оно будет равно суммарной площади двух прямоугольных равнобедренных треугольников с катетами длиной $\frac{1}{2}$ и половины круга с радиусом 1. Отсюда:

$$I = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot1^2 = \frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}$$

Ответ

$$\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}$$

Комментарий

В задании А-66 рассматривалось построение области, координаты точек которой удовлетворяют условию

$$y^2\leqslant 1+\left|\frac{3}{2}\cdot\sin\left(\arcsin\frac{2x}{3}\right)\right|\cdot\left(\left|\,\left|\frac{3}{2}\cdot\sin\left(\arcsin\frac{2x}{3}\right)\right|-1\,\right|-1\right)$$

Из ответа к разобранной выше задачи следует, что площадь такой области составляет

$$S = 2I = \pi + \frac{1}{2}$$