Школьные задачи / Алгебра / А-68

Найдите площадь фигуры, образуемой точками на плоскости, координаты которых удовлетворяют следующему условию:

$$|y| \leqslant \left|\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\left(\arcsin\frac{3x}{2\pi}\right)\right)\right|$$

Решение

Поскольку функция арксинуса определена не для любого значения аргумента, неравенство имеет смысл, если

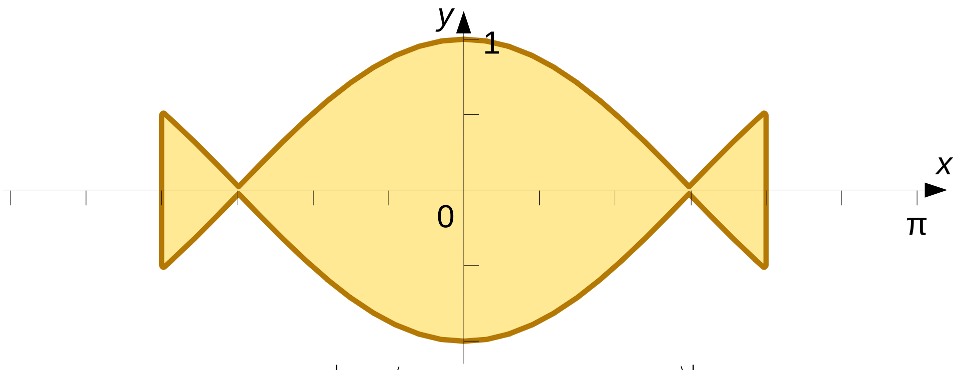
$$-1 \leqslant \frac{3x}{2\pi} \leqslant 1 \quad \text{или} \quad -\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$$

Также легко видеть, что обе части неравенства представляют собой неотрицательные выражения. Это означает, что обе его части можно возвести в квадрат:

$$|y| \leqslant \left|\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\left(\arcsin\frac{3x}{2\pi}\right)\right)\right| \Leftrightarrow (|y|)^2 \leqslant \left(\left|\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\left(\arcsin\frac{3x}{2\pi}\right)\right)\right|\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 \leqslant \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\left(\arcsin\frac{3x}{2\pi}\right)\right)$$

Построение на плоскости области, координаты точек которой соответствуют полученному требованию, рассматривалось в задании А-67, где было установлено, что эта область слева и справа ограничена линиями $x = -\frac{2\pi}{3}$ и $x = \frac{2\pi}{3}$, а сверху и снизу – линиями графиков функций $y = |\cos x|$ и $y = -|\cos x|$ (рис. 1).



$$|y| \leqslant \left|\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\left(\arcsin\frac{3x}{2\pi}\right)\right)\right|$$

Рис. 1.

Полученная фигура симметрична относительно оси ординат (следствие чётности функции косинуса) и оси абсцисс (следствие того, что в левой части неравенства находится $|y|$). Это означает, что искомая площадь S всей фигуры будет равна учетверённой площади I части этой фигуры, расположенной в первом квадранте:

$$S = 4I$$

Исходя из геометрического смысла интеграла величина I будет составлять

$$I = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} |\cos x|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} |\cos x|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} (-\cos x)\,dx =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}=\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)-\left(\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=(1-0)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}+1=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Отсюда

$$S=4\cdot I=4\cdot\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8-2\sqrt{3}$$

О т в е т

$8-2\sqrt{3}$