

Школьные задачи / Алгебра / А-67

Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых соответствуют требованию:

$$y^2 \leq \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} \cdot \sin \left(\arcsin \frac{3x}{2\pi} \right) \right)$$

Решение

Поскольку функция арксинуса определена не для любого значения аргумента, неравенство имеет смысл, если

$$-1 \leq \frac{3x}{2\pi} \leq 1 \text{ или } -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

Это означает, что сама область, изображающая множество точек, на координатной плоскости не будет выходить за пределы линий $x = \pm \frac{2\pi}{3}$.

Рассмотрим отдельно выражение, стоящее под функцией косинуса. При решении задачи А-62 было установлено, что при $a > 1$ и $-a \leq x \leq a$ справедливо соотношение

$$a \cdot \sin \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) = x$$

В нашем случае $a = \frac{2\pi}{3}$, следовательно

$$\frac{2\pi}{3} \cdot \sin \left(\arcsin \frac{3x}{2\pi} \right) = x$$

и при $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right]$ можно выполнить следующие равносильные преобразования:

$$y^2 \leq \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} \cdot \sin \left(\arcsin \frac{3x}{2\pi} \right) \right) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \\ y^2 \leq \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \\ \sqrt{y^2} \leq \sqrt{\cos^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \\ |y| \leq |\cos x| \end{cases}$$

Как видно, для дальнейшего изображения множества точек необходимо построить график для $y = |\cos x|$. Он легко может быть получен из косинусоиды $y = \cos x$ «отзеркаливанием» её частей, расположенных ниже оси абсцисс, в верхнюю полуплоскость (рис. 1).

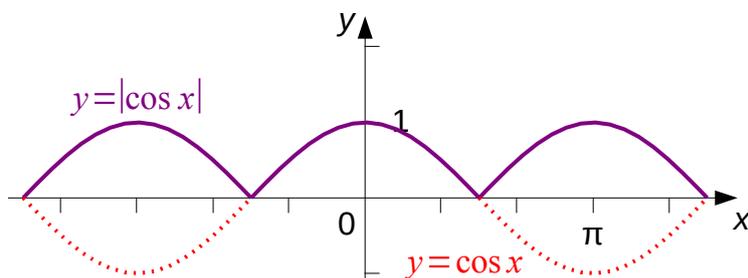


Рис. 1.

Далее нужно будет построить график уравнения $|y| = |\cos x|$ — он получается «зеркальным» дублированием относительно оси абсцисс всего графика функции $y = |\cos x|$ (рис. 2).

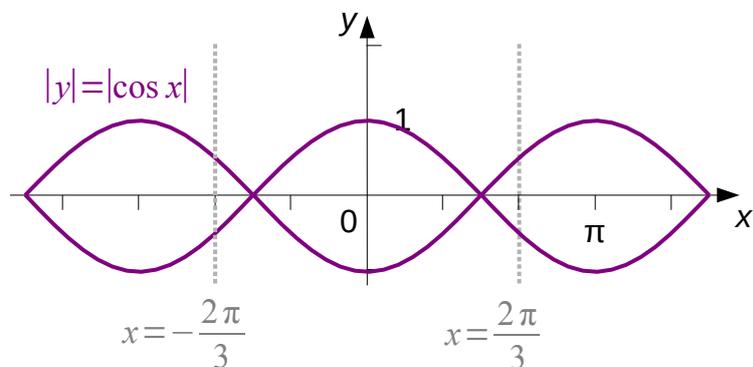
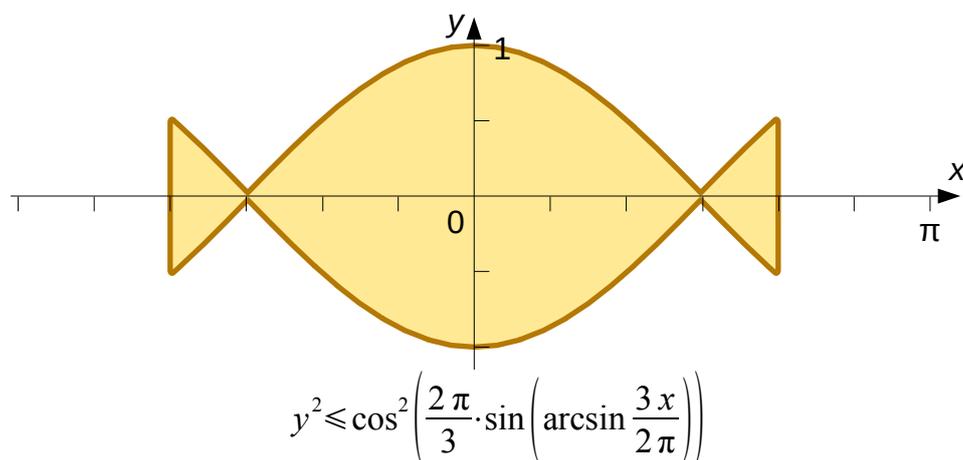


Рис. 2.

Точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $|y| \leq |\cos x|$, находятся в пределах области, ограничиваемой линиями графика $|y| = |\cos x|$ (см. комментарий к заданию А-27). Для завершения построения остаётся учесть требование $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$, чтобы получить искомое изображение множества точек, похожее на завёрнутую в фантик конфету (см. также упражнение А-66).

О т в е т



© Широков Александр, 21.05.2025