

Школьные задачи / Алгебра / А-66

Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых соответствуют требованию:

$$y^2 \leq 1 + \left| \frac{3}{2} \cdot \sin \left(\arcsin \frac{2x}{3} \right) \right| \cdot \left(\left| \frac{3}{2} \cdot \sin \left(\arcsin \frac{2x}{3} \right) \right| - 1 \right) \left| -1 \right|$$

Решение

Прежде всего следует обратить внимание на то, что поскольку функция арксинуса определена не для любого значения аргумента, неравенство имеет смысл, если

$$-1 \leq \frac{2x}{3} \leq 1 \text{ или } -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

Это означает, что сама область, изображающая множество точек, на координатной плоскости не будет выходить за пределы линий $x = \pm \frac{3}{2}$.

Рассмотрим отдельно правую часть исходного неравенства. При решении задачи А-62 было установлено, что при $a > 1$ и $-a \leq x \leq a$ справедливо выражение

$$a \cdot \sin \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) = x$$

В нашем случае $a = \frac{3}{2}$, следовательно

$$\frac{3}{2} \cdot \sin \left(\arcsin \frac{2x}{3} \right) = x$$

и при $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right]$ правая часть исходного неравенства может быть упрощена до

$$1 + |x| \cdot (|x| - 1) \left| -1 \right|$$

В задании А-63 рассматривалось построение графика функции

$$y = 1 + |x| \cdot (|x| - 1) \left| -1 \right|,$$

из которого видно, что сама функция не принимает отрицательных значений на всей своей области определения, охватывающей все действительные значения аргумента (см. также разбор задания А-64). Из этого следует, что исходное неравенство в задании равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{aligned} y^2 \leq 1 + \left| \frac{3}{2} \cdot \sin \left(\arcsin \frac{2x}{3} \right) \right| \cdot \left(\left| \frac{3}{2} \cdot \sin \left(\arcsin \frac{2x}{3} \right) \right| - 1 \right) \left| -1 \right| &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ y^2 \leq 1 + |x| \cdot (|x| - 1) \left| -1 \right| \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ \sqrt{y^2} \leq \sqrt{1 + |x| \cdot (|x| - 1) \left| -1 \right|} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ |y| \leq \sqrt{1 + |x| \cdot (|x| - 1) \left| -1 \right|} \end{cases} \end{aligned}$$

Как видно, для дальнейшего изображения множества точек необходимо построить график для

$$y = \sqrt{1 + |x| \cdot (|x| - 1) \left| -1 \right|}$$

Ранее в задаче А-65 такая функция уже была рассмотрена. Как указывалось выше, применительно к текущему заданию её график будет ограничен линиями

$x = \pm \frac{3}{2}$ (рис. 1).

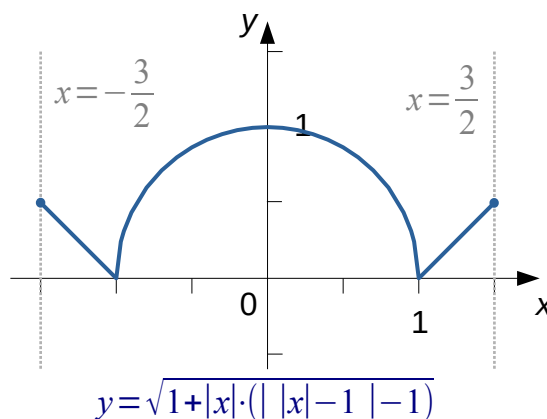
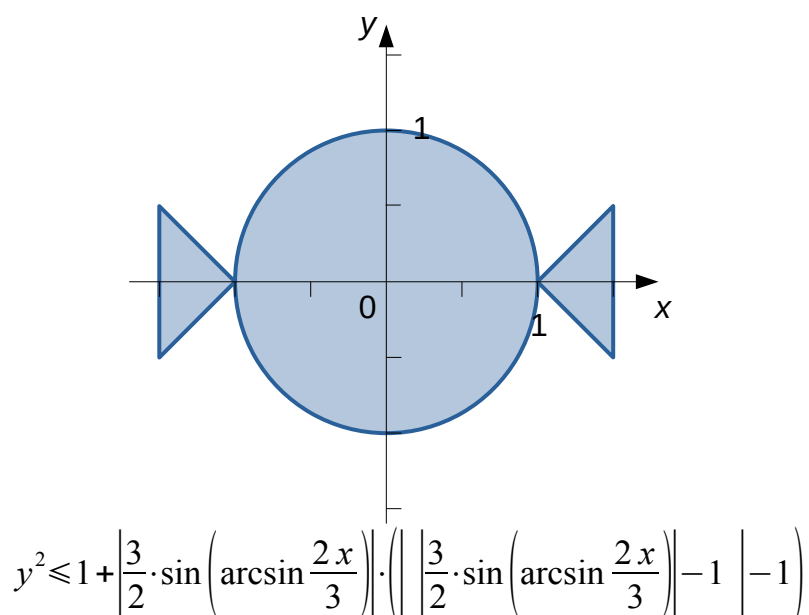


Рис. 1.

Теперь остаётся вспомнить правила, сформулированные в комментариях к задачам А-25 (применительно к рассматриваемому здесь упражнению это позволит построить график уравнения $|y| = \sqrt{1+|x|} \cdot (| |x|-1 | -1)$) и А-27, чтобы изобразить искомое множество, которое представляет собой круг с примыкающими к нему с двух сторон равнобедренными прямоугольными треугольниками, а в целом получившаяся фигура напоминает завернутую в фантик конфету.

О т в е т



© Широков Александр, 21.05.2025