Построить график функции

$$y = \sqrt{1+|x|\cdot(|\,|x|-1\,|-1)}$$

Р е ш е н и е

Начнём с нахождения области определения заданной функции $y(x)$. Её выражение будет иметь смысл если

$$1 + |x|\cdot(|\,|x| - 1\,| - 1) \geqslant 0$$

Перепишем это условие в виде

$$|x|\cdot(|\,|x| - 1\,| - 1) \geqslant -1$$

В задании А-64 было установлено, что неравенство

$$|x|\cdot(|\,|x| - 1\,| - 1) \geqslant a$$

верно при любом x, если $a \leqslant -1$. Из этого факта следует, что подкоренное выражение функции $y(x)$ всегда будет неотрицательным и область её определения – всё множество действительных чисел. Проведём с $y(x)$ ряд равносильных преобразований, раскрыв подмодульные выражения:

$$y = \sqrt{1+|x|\cdot(|\,|x|-1\,|-1)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|-1\geqslant 0\\ y=\sqrt{1+|x|\cdot(|x|-1-1)}\end{cases}\\ \begin{cases}|x|-1<0\\ y=\sqrt{1+|x|\cdot(-(|x|-1)-1)}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\geqslant 1\\ y=\sqrt{1+|x|\cdot(|x|-2)}\end{cases}\\ \begin{cases}|x|<1\\ y=\sqrt{1+|x|\cdot(-|x|+1-1)}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\geqslant 1\\ y=\sqrt{1+|x|\cdot(|x|-2)}\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<1\\ y=\sqrt{1+|x|\cdot(-|x|)}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\geqslant 1\\ y=\sqrt{1+(|x|)^2-2|x|}\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<1\\ y=\sqrt{1-x^2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\geqslant 1\\ x\leqslant -1\end{array}\right.\\ y=\sqrt{1+x^2-2|x|}\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<1\\ y=\sqrt{1-x^2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 1\\ y=\sqrt{1+x^2-2x}\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant -1\\ y=\sqrt{1+x^2+2x}\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<1\\ y=\sqrt{1-x^2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 1\\ y=\sqrt{(x-1)^2}\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant -1\\ y=\sqrt{(x+1)^2}\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<1\\ y=\sqrt{1-x^2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 1\\ y=|x-1|\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant -1\\ y=|x+1|\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<1\\ y=\sqrt{1-x^2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 1\\ y=x-1\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant -1\\ y=-x-1\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<1\\ y=\sqrt{1-x^2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Полученное объединение из трёх систем означает следующее. При $x \geqslant 1$ график $y(x)$ совпадает с графиком линейной функции $y = x - 1$ (рис. 1). Когда $x \leqslant -1$, то выражение $y(x)$ совпадает с $y = -x - 1$, график которой также представляет прямую линию. В случае же $-1 < x < 1$ функция $y(x)$ описывает «верхнюю» половину окружности с центром в начале координат и радиусом, равным единице (см. разбор задания А-21).

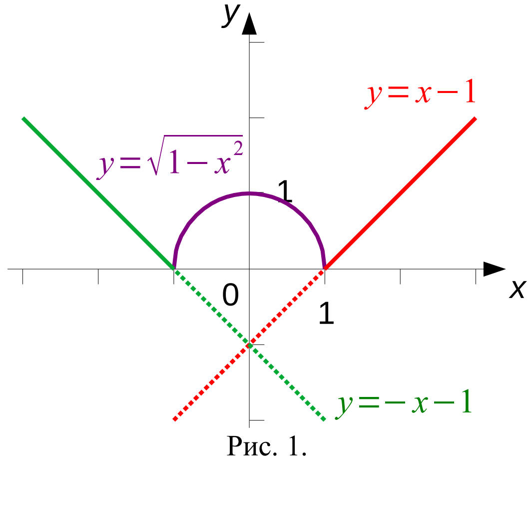
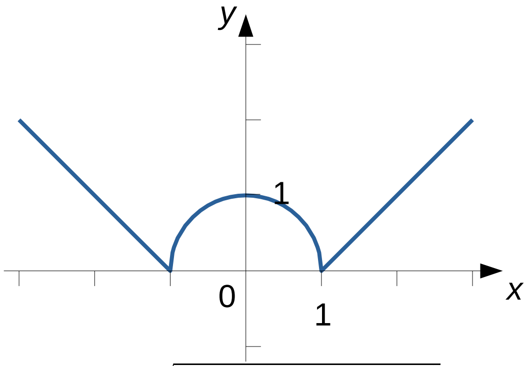


Рис. 1.

О т в е т



$$y = \sqrt{1+|x|\cdot(|\,|x|-1\,|-1)}$$

К о м м е н т а р и й

Решение задачи можно немного упростить, если обратить внимание на чётность $y(x)$ (и, соответственно, на симметричность её графика относительно оси ординат), подобно тому, как это было сделано в разборе задания А-63. Если принять, что $x \geqslant 0$, то

$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ y=\sqrt{1+|x|\cdot(|\,|x|-1\,|-1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0 \\ y=\sqrt{1+x\cdot(|x-1|-1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1\geqslant 0 \\ y=\sqrt{1+x\cdot(x-1-1)} \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<0 \\ y=\sqrt{1+x\cdot(-(x-1)-1)} \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 1 \\ y=\sqrt{1+x\cdot(x-2)} \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ y=\sqrt{1+x\cdot(-x+1-1)} \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 0 \\ x\geqslant 1 \\ y=\sqrt{1+x^2-2x} \end{cases} \\ \begin{cases} x\geqslant 0 \\ x<1 \\ y=\sqrt{1+x\cdot(-x)} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 1 \\ y=\sqrt{(x-1)^2} \end{cases} \\ \begin{cases} 0\leqslant x<1 \\ y=\sqrt{1-x^2} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 1 \\ y=|x-1| \end{cases} \\ \begin{cases} 0\leqslant x<1 \\ y=\sqrt{1-x^2} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 1 \\ y=x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0\leqslant x<1 \\ y=\sqrt{1-x^2} \end{cases} \end{array} \right.$$

© Широков Александр, 21.05.2025