Школьные задачи / Алгебра / А-64

При каких значения параметра a неравенство

$$|x|\cdot(|\,|x|-1\,|-1)\geqslant a$$

выполняется при любом значении x?

Р е ш е н и е

Проведём с неравенством равносильные преобразования:

$$|x|\cdot(|\,|x|-1\,|-1)\geqslant a \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|-1\geqslant 0\\ |x|\cdot(|x|-1-1)\geqslant a\end{cases}\\ \begin{cases}|x|-1<0\\ |x|\cdot(-(|x|-1)-1)\geqslant a\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\geqslant 1\\ |x|\cdot(|x|-2)\geqslant a\end{cases}\\ \begin{cases}|x|<1\\ |x|\cdot(-|x|+1-1)\geqslant a\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\geqslant 1\\ (|x|)^2-2|x|\geqslant a\end{cases}\\ \begin{cases}|x|<1\\ -(|x|)^2\geqslant a\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\geqslant 1\\ x^2-2|x|\geqslant a\end{cases}\\ \begin{cases}|x|<1\\ -x^2\geqslant a\end{cases}\end{array}\right. \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\geqslant 1\\ x\leqslant -1\end{array}\right.\\ x^2-2|x|\geqslant a\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<1\\ -x^2\geqslant a\end{cases}\end{array}\right. \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 1\\ x^2-2x\geqslant a\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant -1\\ x^2+2x\geqslant a\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<1\\ -x^2\geqslant a\end{cases}\end{array}\right. \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 1\\ x^2-2x+1-1\geqslant a\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant -1\\ x^2+2x+1-1\geqslant a\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<1\\ -x^2\geqslant a\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 1\\ (x-1)^2-(1+a)\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant -1\\ (x+1)^2-(1+a)\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<1\\ -x^2\geqslant a\end{cases}\end{array}\right.$$

В приведённых записях переход (1) представляет рассмотрение разных знаков подмодульного выражения $|x|-1$. На стадии (2) расписано решение неравенства $|x|\geqslant 1$, этап (3) – замена системы из неравенства и объединения неравенств на объединение из двух систем. С перехода (4) выполняется выделение полного квадрата в неравенствах $x^2-2x\geqslant a$ и $x^2+2x\geqslant a$.

Далее удобнее рассмотреть каждую из трёх систем получившегося объединения по отдельности.

а) $x\geqslant 1$

При таких значения переменной x исходное неравенство преобразуется к виду

$$(x-1)^2-(1+a)\geqslant 0\,,$$

где левая его часть есть разность двух чисел: $(x-1)^2$ и $(1+a)$. В рассматриваемом случае ($x\geqslant 1$) уменьшаемое $(x-1)^2$ всегда принимает значения большие или равные нулю. Значит, чтобы вся разность

$$(x-1)^2-(1+a)$$

всегда была неотрицательной необходимо, чтобы вычитаемое $(1+a)$ было меньше нуля или хотя бы равным ему:

$$1+a\leqslant 0$$

Отсюда вытекает, что для $x\geqslant 1$ исходное неравенство будет выполняться в случае если

$$a\leqslant -1$$

б) $x\leqslant -1$

Здесь исходное неравенство может быть представлено как

$$(x+1)^2-(1+a)\geqslant 0\,,$$

где слева стоит двух чисел: $(x+1)^2$ и $(1+a)$. Если $x\leqslant -1$, то уменьшаемое $(x+1)^2$ всегда принимает значения большие или равные нулю. Значит, чтобы разность

$$(x+1)^2-(1+a)$$

всегда была неотрицательной нужно потребовать, чтобы вычитаемое $(1+a)$ было меньше или равно нулю:

Материал сайта shurichimik.narod.ru

$$1 + a \leqslant 0 ,$$

то есть если $x \leqslant -1$, то исходное неравенство будет гарантировано выполняться в случае, когда $a \leqslant -1$.

в) $-1 < x < 1$

В этом случае исходное неравенство можно преобразовать к виду

$$-x^2 \geqslant a$$

Из условия $-1 < x < 1$ вытекает, что

$$-1 < -x^2 \leqslant 0 ,$$

а также то, что неравенство $-x^2 \geqslant a$ (как и исходное неравенство) всегда будет справедливым, если $a \leqslant -1$.

Таким образом из рассмотренных рассуждений вытекает, что при $a \leqslant -1$ приведённое в условии задачи неравенство всегда будет справедливым для любых значений x .

О т в е т

$a \leqslant -1$

К о м м е н т а р и й

Задачу можно решить графически. Для этого следует построить график функции

$$y_1(x) = |x|\cdot(|\,|x| - 1\,| - 1) ,$$

а затем определить, при каких значениях a точки $y_1(x)$ оказываются не ниже линии

$$y_2(x) = a$$

Ранее в задании А-63 рассматривалось построение графика функции

$$y_0(x) = 1 + |x|\cdot(|\,|x| - 1\,| - 1)$$

Если его «спустить вниз» на единицу (сдвинуть в сторону отрицательных значений ординат), то как раз получится график $y_1(x)$ (рис. 1), из которого видно, что все его точки не имеют ординат, меньших –1. Отсюда напрямую вытекает ответ к задаче: $a \leqslant -1$.

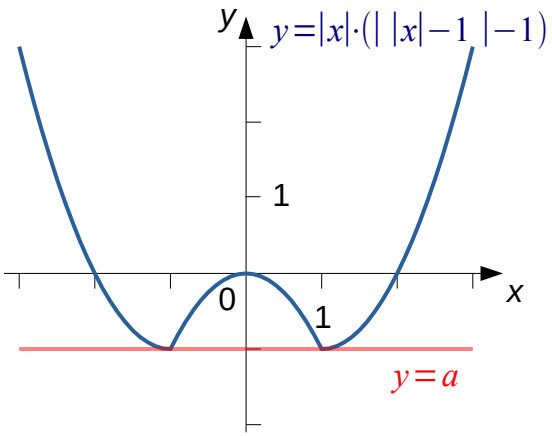

Рис. 1.

© Широков Александр, 21.05.2025

Материал сайта shurichimik.narod.ru