

Построить график функции

$$y = 1 + |x| \cdot (|x| - 1) - 1$$

Решение

Прежде всего заметим, что выражение данной в условии задачи функции $y(x)$ не имеет никаких ограничений, которые следовало бы наложить на возможные значения её аргумента, то есть областью определения $y(x)$ является всё множество действительных чисел. Поскольку $|-x| = |x|$, то другим важным для решения обстоятельством является то, что

$$y(-x) = y(x),$$

иными словами функция $y(x)$ обладает свойством чётности и её график симметричен относительно оси ординат. Благодаря этому достаточно рассмотреть построение графика при $x \geq 0$, но в этом случае $|x| = x$ и выражение $y(x)$ упростится:

$$y_1 = 1 + x \cdot (|x - 1| - 1)$$

Раскроем оставшееся под модулем выражение:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \geq 0 \\ y_1 = 1 + x \cdot (|x - 1| - 1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ y_1 = 1 + x \cdot (x - 1 - 1) \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 < 0 \\ y_1 = 1 + x \cdot (-(x - 1) - 1) \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ y_1 = 1 + x \cdot (x - 2) \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ y_1 = 1 + x \cdot (-x + 1 - 1) \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ y_1 = 1 + x \cdot (x - 2) \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ y_1 = 1 + x \cdot (-x) \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y_1 = 1 + x \cdot (x - 2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y_1 = 1 + x^2 - 2x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y_1 = (x - 1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ y_1 = 1 + x \cdot (x - 2) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ y_1 = 1 + x \cdot (-x) \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ y_1 = 1 - x^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ y_1 = 1 - x^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Полученные результаты говорят о следующем.

Во-первых, при $x \geq 1$ график $y_1(x)$ (а равно и график $y(x)$) совпадает с графиком функции $(x - 1)^2$, то есть представляет собой квадратичную параболу $y = x^2$, смещённую на единицу вправо (рис. 1), в сторону положительных значений оси абсцисс (с учётом требования $x \geq 1$ получается правая ветвь параболы).

Во-вторых, на полуинтервале $x \in [0; 1)$ график $y_1(x)$ совпадает с графиком $y = 1 - x^2$, являющимся квадратичной параболой с опущенными вниз ветвями и поднятой вверх на единицу (в сторону положительных значений оси ординат).

Для получения графика $y(x)$ остаётся отразить относительно оси ординат построенную для $y_1(x)$ линию.

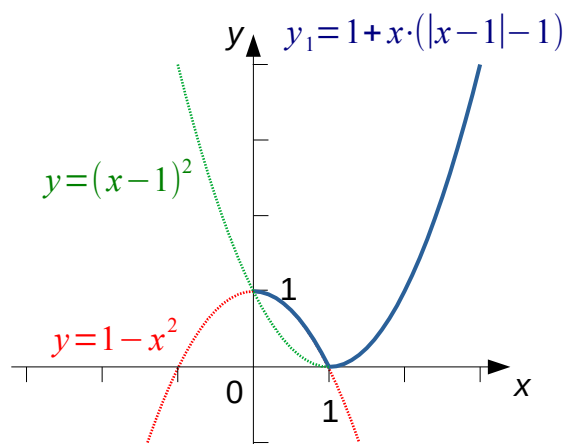
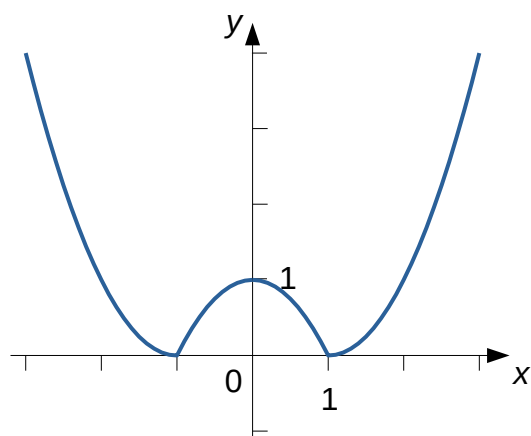


Рис. 1.

О т в е т



$$y = 1 + |x| \cdot (|x| - 1)$$

© Широков Александр, 21.05.2025