Школьные задачи / Алгебра / А-62

Построить график функции, если $a > 1$:

$$y(x) = a \cdot \sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

Решение

Функция синуса определена для любого действительного значения аргумента, функция же арксинуса имеет смысл, если её аргументом является число от –1 до 1, следовательно областью определения $y(x)$ будут все x, удовлетворяющие условию

$$-1 \leqslant \frac{x}{a} \leqslant 1$$

Отсюда следует, что $y(x)$ имеет смысл если $x \in [-a; a]$.

В задании А-54 уже рассматривалась функция

$$y_1(x) = \sin(\arcsin x)$$

В ней аргументом синуса является арксинус, а с учётом того, что он – функция обратная синусу, то при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ выражение $\sin(\arcsin x)$ возвращает значение самого x. Иными словами, на отрезке $x \in [-1; 1]$

$$y_1(x) = \sin(\arcsin x) = x\ ,$$

то есть совпадает с графиком линейной функции $y = x$ (рис. 1). Зная это, не составляет труда построить график

$$y_2(x) = \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{a} \cdot x\right)\right)$$

– он получается из графика $y_1(x)$ «растяжением» последнего в a раз вдоль оси абсцисс (рис. 1). Сходным образом – растяжением в a раз вдоль оси ординат – получается график $y(x)$ из $y_2(x)$ (рис. 2).

Выходит, что искомый график функции $y(x)$ на области её определения ($x \in [-a; a]$) представляет отрезок, совпадающий с графиком $y = x$. Из сказанного вытекает, что при $-a \leqslant x \leqslant a$ $(a > 1)$ выполняется равенство:

$$a \cdot \sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = x$$

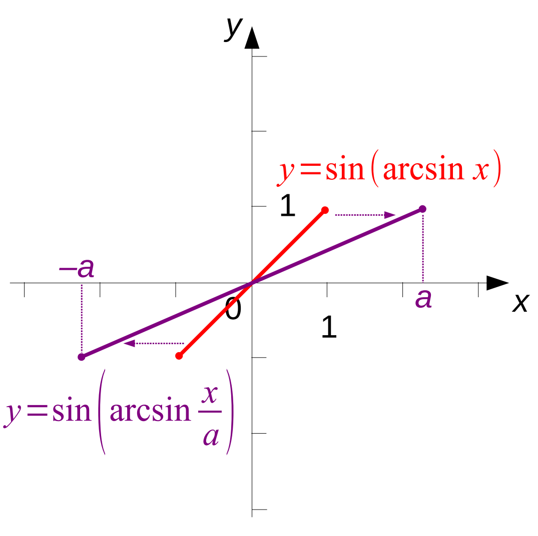


Рис. 1.

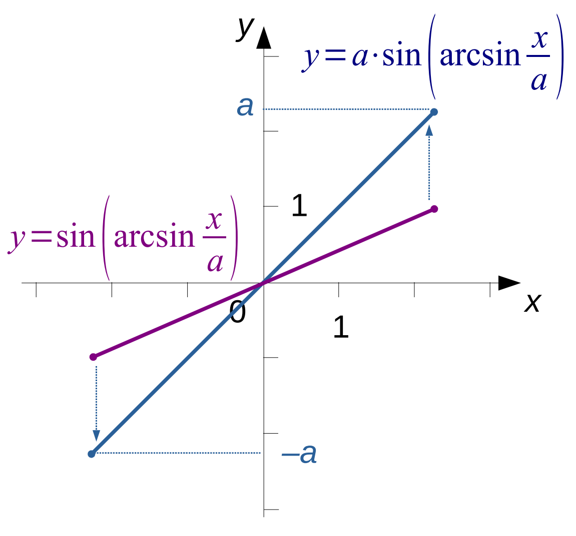
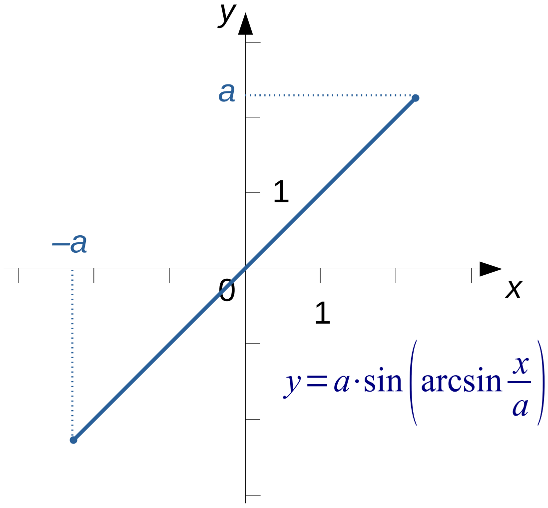


Рис. 2.

Ответ



Комментарий

Справедливость равенства $a\cdot\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = x$ можно показать иным способом. Найдём производную функции $y(x)$:

$$\left(a\cdot\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right)' = a\cdot\left(\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right)' = a\cdot\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cdot\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)' =$$

$$= a\cdot\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a} = \cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = 1$$

(в конце приведённых преобразований использовано* равенство $\cos(\arcsin t) = \sqrt{1-t^2}$). Итак:

$$\left(a\cdot\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right)' = 1 \text{ и } (x)' = 1$$

Если производные двух функций равны, то это означает, что сами функции отличаются друг от друга на постоянное число C:

$$a\cdot\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = x + C$$

Для нахождения C положим $x = 0$, тогда $a\cdot\sin\left(\arcsin\frac{0}{a}\right) = 0 + C$, откуда $C = 0$.

* См. заметку «Очередное баловство с формулами» (URL: https://shurichimik.narod.ru/consideration/53-sincos/53-sincos.htm).