

Найдите решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Решение

Несмотря на несколько необычный вид – система содержит два уравнения, в каждом из которых фигурирует только одно неизвестное – постановка задачи является вполне правомерной, ведь решить систему уравнений с двумя неизвестными x и y означает отыскать такие пары их значений, которые при подстановке обратят уравнения в верные числовые равенства. «Изолированность» переменных позволяет решить каждое из уравнений системы по отдельности. У

$$x^2 + x - 2 = 0$$

корни несложно отыскать с использованием теоремы Виета: под числа, сумма которых равна -1 , а произведение -2 подходят $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Применяя эту же теорему к

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

получаем, что $y_1 = -1$, $y_2 = 3$. Так как x и y не зависящие друг от друга переменные, то решения системы будут получаться из соображений о том, что для каждого конкретного значения x будет подходить каждое из значений y . Таким образом решения системы будут представлять собой все сочетания $(x; y)$, которых может быть четыре: $(1; -1)$, $(1; 3)$, $(-2; -1)$, $(-2; 3)$.

Ответ

$(1; -1)$, $(1; 3)$, $(-2; -1)$, $(-2; 3)$

Комментарий

Решения системы можно отыскать и иначе – способами, описанными в разборе задания А-59: аналитическим и графическим.

Первый вариант подразумевает следующую череду равносильных преобразований:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) = 0 \\ (y+1)(y-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \\ y+1=0 \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \\ y=-1 \\ y=3 \end{cases} \stackrel{(\text{1})}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ x=1 \\ y=3 \\ x=-2 \\ y=-1 \\ x=-2 \\ y=3 \end{cases}$$

Переход (1) от системы из двух объединений к объединению из четырёх систем (т. е. к конечным решениям исходной системы) получается, если четырём математическим высказываниям присвоить условные буквенные обозначения

$$A: x = 1 \quad B: x = -2 \quad C: y = -1 \quad D: y = 3,$$

и, заменив квадратные скобки (символ объединения) на знак сложения, а фигурную скобку (символ системы) – на знак умножения, записать систему из двух объединений в виде

$$(A + B) \cdot (C + D),$$

после чего раскрыть скобки по обычным алгебраическим правилам

$$(A + B) \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$$

а далее снова вернуться к прежним обозначениям.

Графический способ решения системы представлен на рис. 1. Графики первого и второго уравнений системы представляют пары прямых линий, а решения являются точками пересечения этих линий. Как легко видеть, координаты их есть $(1; -1)$, $(1; 3)$, $(-2; -1)$, $(-2; 3)$.

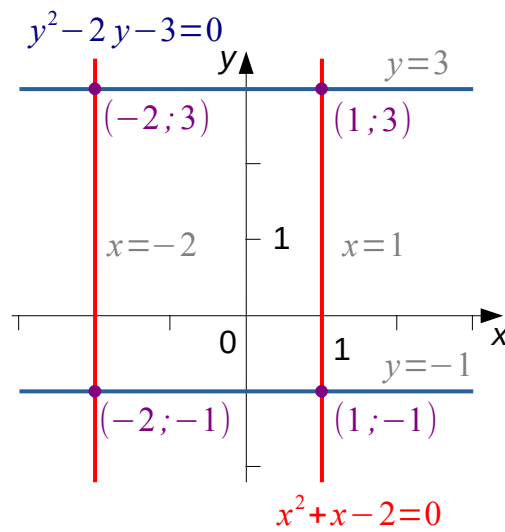


Рис. 1.

© Широков Александр, 27.04.2025