Школьные задачи / Алгебра / А-60

Каким условиям должны удовлетворять действительные числа a, b, c и d, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} xy+ab=bx+ay \\ xy+cd=dx+cy \end{cases}$$

имела ровно два решения?

Р е ш е н и е

Последовательность действий будет сходна с использовавшейся в задании А-59. Преобразуем сначала первое уравнение системы. Для этого все его слагаемые перенесём из правой в левую часть

$$xy + ab = bx + ay \;\Leftrightarrow\; xy + ab - bx - ay = 0\ ,$$

а далее попробуем разложить левую часть на множители при помощи группировки:

$$xy + ab - bx - ay = xy - bx - ay + ab = x(y - b) - a(y - b) = (y - b)(x - a)$$

Аналогично поступим со вторым уравнением:

$$xy + cd = dx + cy = 0 \;\Leftrightarrow\; xy + cd - dx - cy = 0$$

и

$$xy + cd - dx - cy = xy - dx + cd - cy = x(y - d) - c(y - d) = (y - d)(x - c)$$

Таким образом с исходной системой можно осуществить следующие равносильные преобразования:

$$\begin{cases} xy+ab=bx+ay \\ xy+cd=dx+cy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)(y-b)=0 \\ (x-c)(y-d)=0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-a=0 \\ y-b=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-c=0 \\ y-d=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=a \\ y=b \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=c \\ y=d \end{array}\right. \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=a \\ x=c \end{cases} \\ \begin{cases} x=a \\ y=d \end{cases} \\ \begin{cases} y=b \\ x=c \end{cases} \\ \begin{cases} y=b \\ y=d \end{cases} \end{array}\right.$$

Переход (1) обусловлен тем, что произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Шаг (2), представляющий переход от системы из двух объединений к объединению четырёх систем, получается из следующих соображений. Знак объединения (квадратная скобка) имеет смысл логического сложения*, а знак системы – логического умножения. Присвоив математическим выражениям соответствующие буквенные обозначения

$$\text{A: } x = a \qquad \text{B: } y = b \qquad \text{C: } x = c \qquad \text{D: } y = d$$

можно сначала систему из двух объединений формально представить в виде

$$(\text{A} + \text{B})\cdot(\text{C} + \text{D})\ ,$$

раскрыть скобки

$$(\text{A} + \text{B})\cdot(\text{C} + \text{D}) = \text{A}\cdot\text{C} + \text{A}\cdot\text{D} + \text{B}\cdot\text{C} + \text{B}\cdot\text{D}$$

и переписать получившееся выражение уже как объединение четырёх систем. Легко видеть, что в ней вторая и третья системы

$$\begin{cases} x=a \\ y=d \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=c \\ y=b \end{cases}$$

как раз описывают два решения системы исходной: (a; d), (c; b), причем эти решения будут существовать всегда, вне зависимости от того, какие значения имеют числа a, b, c, d. Если теперь вернуться к требованию задачи, то из него вытекает, что для его выполнения необходимо

* См. заметку «О равносильных преобразованиях (для школьников)» (URL: https://shurichimik.narod.ru/consideration/35equivalence/35-equivalence.htm).

Материал сайта shurichimik.narod.ru

и достаточно, чтобы первая и четвёртая системы объединения решений не имели, то есть были равносильны пустому множеству:

$$\begin{cases} x=a \\ x=c \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing \quad \text{и} \quad \begin{cases} y=b \\ y=d \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

Для этого надо, чтобы a, b, c, d соотносились между собой следующим образом:

$$a \neq c \quad \text{и} \quad b \neq d$$

Эти выражения и будут условиями наличия у исходной системы уравнений только двух решений, тем не менее для полноты рассмотрения задачи имеет смысл выяснить, что будет при невыполнении установленных условий. Для наглядности изобразим сначала графики уравнений $(x - a)\cdot(y - b) = 0$ и $(x - c)\cdot(y - d) = 0$ (они равносильны исходным уравнения системы – см. выше). График первого уравнения представляет собой совокупность линий, описываемых уравнениями $x = a$ и $y = b$, а график второго – совокупность линий $x = c$ и $y = d$. На рис. 1 изображён случай, когда $a \neq c$ и $b \neq d$, а решения системы есть точки пересечения графиков уравнений, имеющие координаты $(a; d)$ и $(c; b)$.

Пусть теперь $a = c$, а $b \neq d$. Исходную систему тогда можно записать в виде

$$\begin{cases} (x-a)(y-b)=0 \\ (x-a)(y-d)=0 \end{cases}$$

График её уравнений изображён на рис. 2 и видно, что их общие точки (множество решений) составляют линию $x = a$. Иными словами исходная система при $a = c$, а $b \neq d$ имеет бесконечно много решений, совокупность которых можно описать как $x = a$, а y – любое действительное число.

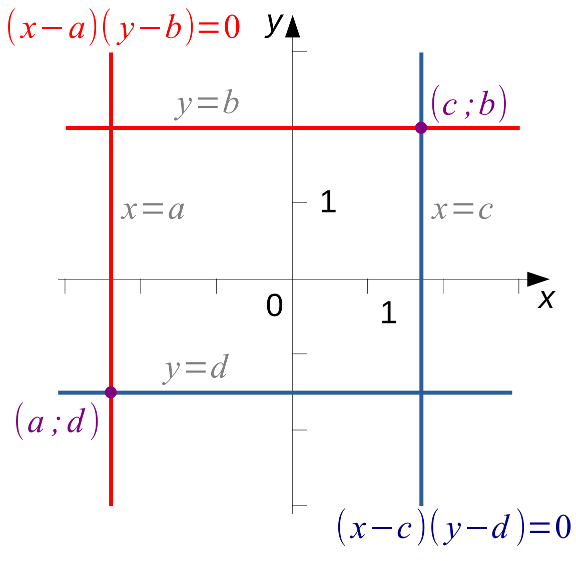

Рис. 1.

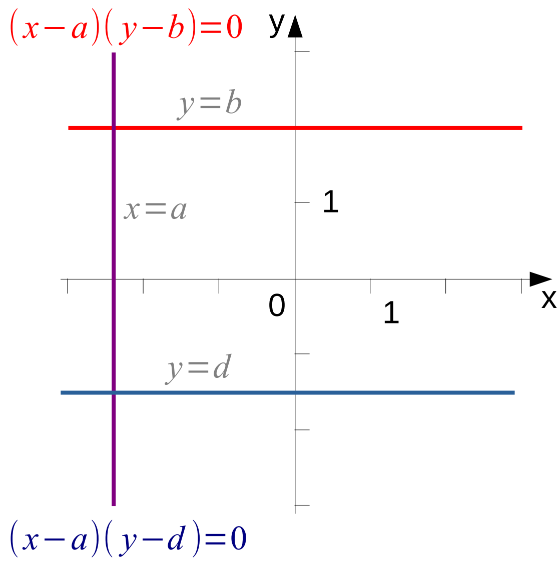

Рис. 2.

Случай, когда $a \neq c$, а $b = d$ приводит к системе вида

$$\begin{cases} (x-a)(y-b)=0 \\ (x-c)(y-b)=0 \end{cases},$$

которая также имеет бесконечное количество решений, в которых $y = b$, а x – любое действительное число (рис. 3).

Ну и наконец вариант, когда $a = c$, а $b = d$. Здесь система вырождается в одно уравнение

$$(x - a)\cdot(y - b) = 0 ,$$

для которого множество пар чисел x и y, обращающих его в верное числовое равенство (то есть множество решений) можно описать как или $x = a$, а $y \in \mathbb{R}$, или $y = b$, а $x \in \mathbb{R}$, что дополнительно иллюстрируется на рис. 4.

Материал сайта shurichimik.narod.ru

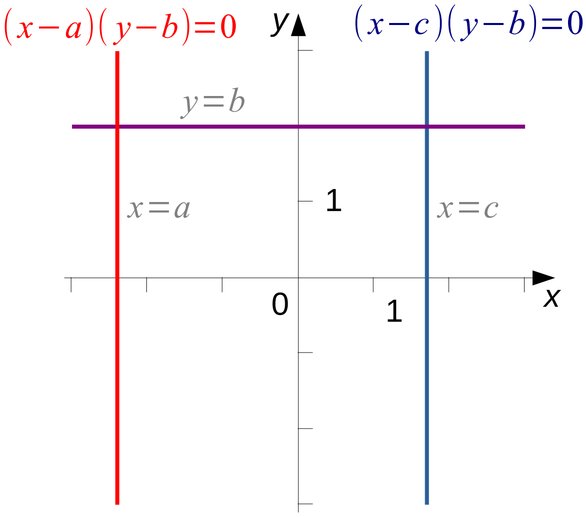

Рис. 3.

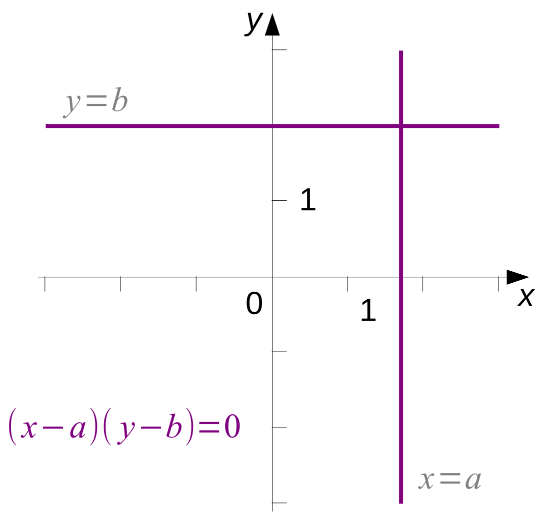

Рис. 4.

О т в е т

$a \neq c$; $b \neq d$

© Широков Александр, 27.04.2025

Материал сайта shurichimik.narod.ru