

## Школьные задачи / Алгебра / А-55

Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых соответствуют требованию:

$$|y| \leq \cos\left(\arccos\left(|x| + \frac{1}{3}\right)\right)$$

Решение

Начнём с построения графика функции

$$y_1(x) = \cos(\arccos x)$$

Легко видеть, что область определения  $y_1(x)$  совпадает с областью определения функции арккосинуса:  $x \in [-1; 1]$ .

В  $y_1(x)$  аргументом косинуса является арккосинус, а с учётом того, что арккосинус – функция обратная косинусу, то при  $-1 \leq x \leq 1$  выражение  $\cos(\arccos x)$  возвращает значение самого  $x$ . Иными словами, на отрезке  $x \in [-1; 1]$

$$y_1(x) = x,$$

то есть совпадает с графиком линейной функции  $y = x$  (рис. 1).

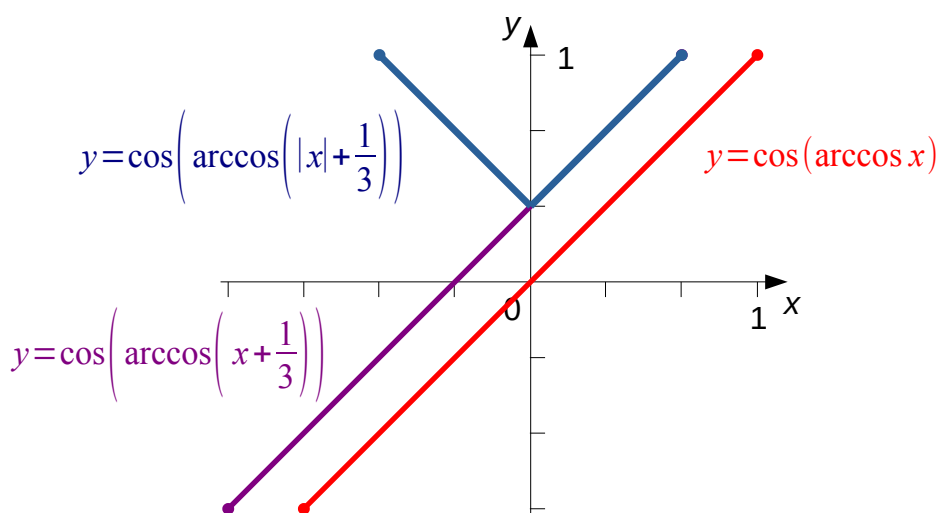


Рис. 1.

Рассмотрим теперь функцию

$$y_2(x) = \cos\left(\arccos\left(|x| + \frac{1}{3}\right)\right)$$

Она определена, если  $-1 \leq |x| + \frac{1}{3} \leq 1$ , то есть при

$$\begin{cases} |x| + \frac{1}{3} \geq -1 \\ |x| + \frac{1}{3} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq -\frac{4}{3} \\ |x| \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$$

Поскольку  $|x| = |-x|$ , то  $y_2(x)$  является чётной функцией и её график симметричен относительно оси ординат. Это означает, что для построения графика  $y_2(x)$  достаточно построить его при  $x > 0$  (вторую его часть при  $x < 0$  можно получить зеркальным отражением первой в полуплоскость отрицательных значений абсцисс), но в этом случае  $|x| = x$ , поэтому построим сначала график

$$y_3(x) = \cos\left(\arccos\left(x + \frac{1}{3}\right)\right)$$

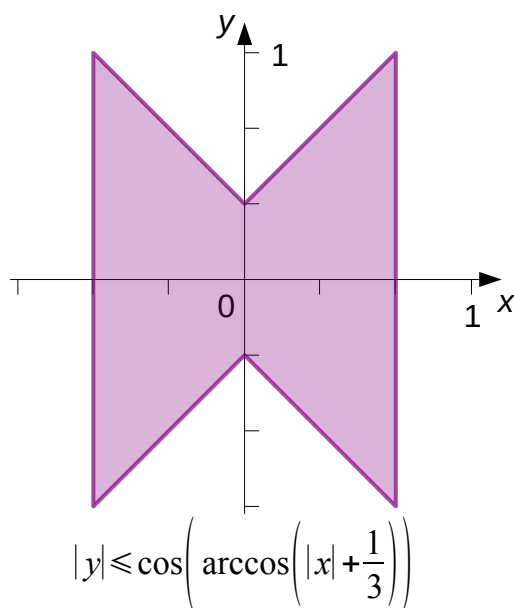
Он легко получается из графика  $y_1(x)$  смещением последнего «влево» (в направлении отрицательных значений оси абсцисс) на  $\frac{1}{3}$  (рис. 1). Заметим, что  $y_2(0) = \frac{1}{3}$ . «Отзеркалим» в левую полуплоскость часть графика  $y_3(x)$ , находящуюся в правой полуплоскости, и получим график  $y_2(x)$  (рис. 1).

Теперь применим правило, сформулированное в комментарии к задаче А-25 – относительно рассматриваемого здесь упражнению это позволит построить график уравнения

$$|y| = \cos\left(\arccos\left(|x| + \frac{1}{3}\right)\right),$$

а затем используем правило из комментария к задаче А-27, чтобы изобразить искомое множество, которое будет представлять фигуру, по форме похожую на галстук «бабочка».

О т в е т



© Широков Александр, 27.11.2024