Школьные задачи / Алгебра / А-53

Решите уравнение:

$$4[x]\{x\} + 4 = x + 15\{x\}$$

(под целой частью числа x, обозначающейся при помощи квадратных скобок $[x]$, понимается наибольшее целое число, не превышающее заданное; дробная часть x обозначается фигурными скобками и определяется как разность между самим числом и его целой частью: $\{x\} = x - [x]$; область определения функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$ – всё множество действительных чисел, к тому же $y = \{x\}$ – периодическая функция с периодом, равным 1, а полуинтервал $[0; 1)$ является областью её значений).

Р е ш е н и е

В исходном уравнении фигурирует как сама неизвестная величина, так и её целая и дробная части. Для решения уравнения имеет смысл избавиться хотя бы от чего-то одного, воспользовавшись соотношением

$$x = [x] + \{x\}$$

Подставляем его и получаем:

$$4[x]\{x\} + 4 = [x] + \{x\} + 15\{x\} \quad \Leftrightarrow \quad 4[x]\{x\} + 4 = [x] + 16\{x\}$$

Перенесём все слагаемые в левую часть уравнения и попробуем при помощи группировки выполнить разложение на множители:

$$\begin{gathered} 4[x]\{x\} + 4 = [x] + 16\{x\} \Leftrightarrow \\ 4[x]\{x\} + 4 - [x] - 16\{x\} = 0 \Leftrightarrow \\ 4[x]\{x\} - 16\{x\} + 4 - [x] = 0 \Leftrightarrow \\ 4\{x\}([x] - 4) + 4 - [x] = 0 \Leftrightarrow \\ 4\{x\}([x] - 4) - ([x] - 4) = 0 \Leftrightarrow \\ ([x] - 4)\cdot(4\{x\} - 1) = 0 \end{gathered}$$

Полученное уравнение в целом аналогично разбиравшемуся ранее в упражнении А-48, поэтому ход его решения будет схожим:

$$([x] - 4)\cdot(4\{x\} - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} [x]-4=0 \\ 4\{x\}-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} [x]=4 \\ 4\{x\}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\leqslant x<5 \\ \{x\}=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in[4;\,5) \\ x=\dfrac{1}{4}+k \quad (k\in\mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

О т в е т

$x = \dfrac{1}{4} + k$ $(k \in \mathbb{Z})$, $x \in \left[4;\ 4\dfrac{1}{4}\right) \cup \left(4\dfrac{1}{4};\ 5\right)$