Школьные задачи / Алгебра / А-52

Решите уравнение:

$$[3\{x\}^2 + 8\{x\} - 3] = 0$$

(под целой частью числа x, обозначающейся при помощи квадратных скобок $[x]$, понимается наибольшее целое число, не превышающее заданное; дробная часть x обозначается фигурными скобками и определяется как разность между самим числом и его целой частью: $\{x\} = x - [x]$; область определения функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$ – всё множество действительных чисел, к тому же $y = \{x\}$ – периодическая функция с периодом, равным 1, а полуинтервал $[0; 1)$ является областью её значений).

Р е ш е н и е

Выполним замену переменной:

$$t = \{x\}$$

Исходное уравнение тогда перепишется в виде

$$[3t^2 + 8t - 3] = 0$$

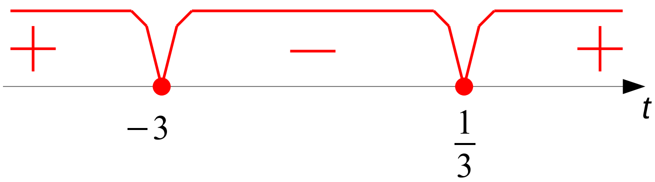
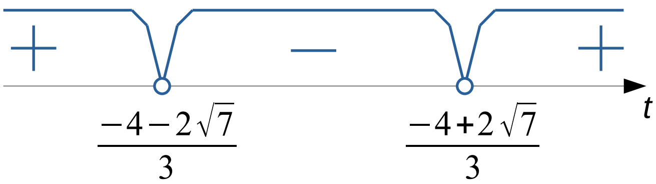
Целая часть квадратного трёхчлена $3t^2 + 8t - 3$ равна нулю в случае, если его значение находится на промежутке $[0; 1)$. Получается, что уравнение равносильно системе:

$$[3t^2 + 8t - 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2+8t-3 \geqslant 0 \\ 3t^2+8t-3<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2+8t-3 \geqslant 0 \\ 3t^2+8t-4<0 \end{cases}$$

Сначала решим каждое из квадратных неравенств по отдельности методом интервалов. Для этого запишем соответствующие квадратные уравнения и отыщем у них корни.

$3t^2 + 8t - 3 = 0$	$3t^2 + 8t - 4 = 0$
$t_{1,2}=\dfrac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot3\cdot(-3)}}{2\cdot3}=$ $=\dfrac{-8\pm\sqrt{64+36}}{6}=\dfrac{-8\pm\sqrt{100}}{6}=\dfrac{-8\pm10}{6}$	$t_{1,2}=\dfrac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot3\cdot(-4)}}{2\cdot3}=$ $=\dfrac{-8\pm\sqrt{64+48}}{6}=\dfrac{-8\pm\sqrt{112}}{6}=\dfrac{-8\pm4\sqrt{7}}{6}=\dfrac{-4\pm2\sqrt{7}}{3}$
$t_1 = -3$ $t_2 = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}33$	$t_1 = \dfrac{-4-2\sqrt{7}}{3} \approx -3{,}10$ $t_2 = \dfrac{-4+2\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}43$

Перейдём далее к квадратным неравенствам:

$3t^2 + 8t - 3 \geqslant 0$ 	$t\in(-\infty; -3]\cup\left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$
$3t^2 + 8t - 4 < 0$ 	$t\in\left(\dfrac{-4-2\sqrt{7}}{3}; \dfrac{-4+2\sqrt{7}}{3}\right)$

Теперь можно заняться решением системы – сделаем это графически (рис. 1).

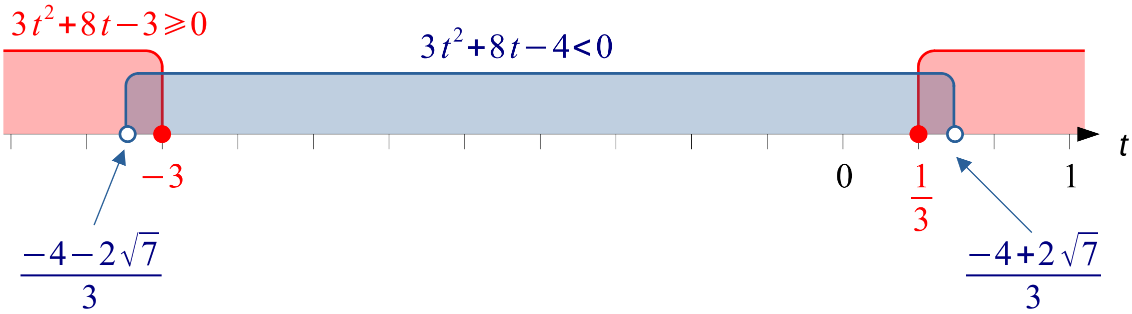


Рис. 1.

Из рисунка видно, что на числовой прямой множество общих точек для обоих неравенств можно описать как объединение двух полуинтервалов:

$$t\in\left(\frac{-4-2\sqrt{7}}{3};\,-3\right]\cup\left[\frac{1}{3};\,\frac{-4+2\sqrt{7}}{3}\right)$$

Возвращаясь к старой переменной получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{-4-2\sqrt{7}}{3}<\{x\}\leqslant -3\\ \frac{1}{3}\leqslant\{x\}<\frac{-4+2\sqrt{7}}{3}\end{array}\right.$$

Функция дробной части числа принимает только неотрицательные значения, следовательно, первое двойное неравенство объединения не выполняется ни при каких x:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{-4-2\sqrt{7}}{3}<\{x\}\leqslant -3\\ \frac{1}{3}\leqslant\{x\}<\frac{-4+2\sqrt{7}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varnothing\\ \frac{1}{3}\leqslant\{x\}<\frac{-4+2\sqrt{7}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{3}\leqslant\{x\}<\frac{-4+2\sqrt{7}}{3}$$

Числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{-4+2\sqrt{7}}{3}$ – положительные, при этом они меньше единицы, следовательно, последнее полученное неравенство как минимум имеет решение, так как $\{x\}$ может принимать указанные значения. Из смысла дробной части следует, что любое число из полуинтервала $\left[\frac{1}{3};\,\frac{-4+2\sqrt{7}}{3}\right)$ при подстановке его вместо переменной x обращает выражение

$$\frac{1}{3}\leqslant\{x\}<\frac{-4+2\sqrt{7}}{3}$$

в верное числовое неравенство. Если учесть периодичность функции $\{x\}$, то получается, что решение неравенства можно записать в виде:

$$x\in\left[\frac{1}{3}+k;\,\frac{-4+2\sqrt{7}}{3}+k\right),\ \text{где } k\in\mathbb{Z}$$

Как нетрудно догадаться, корни исходного уравнения будут выражаться точно также.

О т в е т

$$x\in\left[\frac{1}{3}+k;\,\frac{-4+2\sqrt{7}}{3}+k\right),\ \text{где } k\in\mathbb{Z}$$