Школьные задачи / Алгебра / А-51

Решите уравнение:

$$[x^2 + 2|x| - 3] = 4$$

(под целой частью числа x понимается наибольшее целое число, не превышающее заданное; её принято обозначать при помощи квадратных скобок: $[x]$; функция $y = [x]$ определена на всём множестве действительных чисел).

Р е ш е н и е

Проведём с уравнением равносильные преобразования, раскрыв модуль и учитывая, что величина, целая часть которой равна 4, имеет значение меньшее 5, но не меньшее 4:

$$[x^2 + 2|x| - 3] = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ [x^2+2x-3]=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ [x^2-2x-3]=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2+2x-3 \geqslant 4 \\ x^2+2x-3<5 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x^2-2x-3 \geqslant 4 \\ x^2-2x-3<5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2+2x-7 \geqslant 0 \\ x^2+2x-8<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x^2-2x-7 \geqslant 0 \\ x^2-2x-8<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

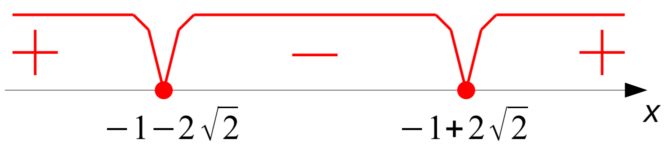
В объединении двух систем фигурируют четыре квадратных неравенства. Решим каждое из них методом интервалов. Для этого необходимо найти нули квадратных трёхчленов. Выделим сначала из них полные квадраты:

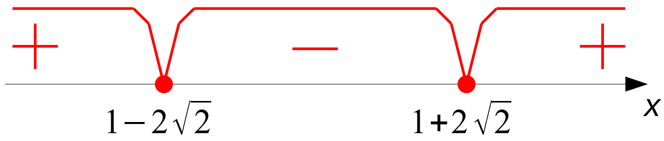
1) $x^2 + 2x - 7 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 7 = (x + 1)^2 - 8$
2) $x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 8 = (x + 1)^2 - 9$
3) $x^2 - 2x - 7 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 7 = (x - 1)^2 - 8$
4) $x^2 - 2x - 8 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 8 = (x - 1)^2 - 9$

Запишем соответствующие квадратные уравнения и отыщем их корни:

(1)	(2)	(3)	(4)
$(x + 1)^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow$ $(x + 1)^2 = 8 \Leftrightarrow$ $x + 1 = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow$ $x = -1 \pm 2\sqrt{2}$	$(x + 1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$ $(x + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow$ $x + 1 = \pm 3 \Leftrightarrow$ $x = -1 \pm 3$	$(x - 1)^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow$ $(x - 1)^2 = 8 \Leftrightarrow$ $x - 1 = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow$ $x = 1 \pm 2\sqrt{2}$	$(x - 1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$ $(x - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow$ $x - 1 = \pm 3 \Leftrightarrow$ $x = 1 \pm 3$
$x_1 = -1 - 2\sqrt{2} \approx -3{,}82$ $x_2 = -1 + 2\sqrt{2} \approx 1{,}82$	$x_1 = -4$ $x_2 = 2$	$x_1 = 1 - 2\sqrt{2} \approx -1{,}82$ $x_2 = 1 + 2\sqrt{2} \approx 3{,}82$	$x_1 = -2$ $x_2 = 4$

Далее перейдём к квадратным неравенствам:

(1)	$x^2 + 2x - 7 \geqslant 0$ 	$x \in (-\infty; -1 - 2\sqrt{2}\,] \cup [-1 + 2\sqrt{2}\,; +\infty)$

(2)	$x^2 + 2x - 8 < 0$ 	$x \in (-4;\ 2)$
(3)	$x^2 - 2x - 7 \geqslant 0$ 	$x \in (-\infty;\ 1 - 2\sqrt{2}\,] \cup [1 + 2\sqrt{2}\,;\ +\infty)$
(4)	$x^2 - 2x - 8 < 0$ 	$x \in (-2;\ 4)$

Теперь можно заняться решением первой системы неравенств:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 + 2x - 7 \geqslant 0 \\ x^2 + 2x - 8 < 0 \end{cases}$$

Сделаем это графически. Из рис. 1. видно, что на числовой прямой общими точками для всех трёх неравенств является полуинтервал $x \in [-1 + 2\sqrt{2}\,;\ 2)$.

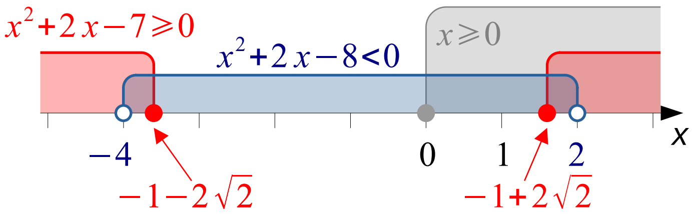


Рис. 1.

Аналогично решается система

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 2x - 7 \geqslant 0 \\ x^2 - 2x - 8 < 0 \end{cases}$$

В её случае (рис. 2) имеем промежуток $x \in (-2;\ 1 - 2\sqrt{2}\,]$.

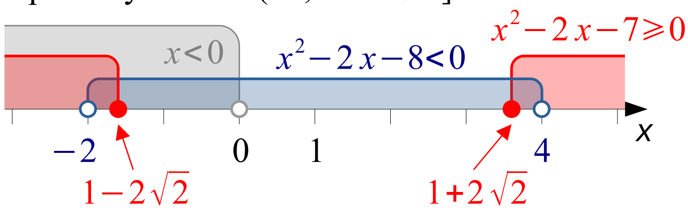


Рис. 2.

Из полученных результатов следует, что множеством чисел, являющихся решением исходного уравнения, является объединение двух полученных выше полуинтервалов.

Ответ

$x \in (-2;\ 1 - 2\sqrt{2}\,] \cup [-1 + 2\sqrt{2}\,;\ 2)$