Школьные задачи / Алгебра / А-50

Решите уравнение:

$$[x^2 + 2x - 3] + 4 = 0$$

(под целой частью числа x понимается наибольшее целое число, не превышающее заданное; её принято обозначать при помощи квадратных скобок: $[x]$; функция $y = [x]$ определена на всём множестве действительных чисел).

Р е ш е н и е

Для удобства обозначим квадратный трёхчлен в уравнении следующим образом:

$$x^2 + 2x - 3 = t,$$

после чего перенесём 4 в правую часть. Получим:

$$[t] = -4$$

Целая часть числа равна –4, если само это число находится на следующем промежутке:

$$-4 \leqslant t < -3$$

Если сделать обратную замену, то получим, что исходное уравнение равносильно системе неравенств:

$$[x^2 + 2x - 3] + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3 \geqslant -4 \\ x^2+2x-3 < -3 \end{cases}$$

Преобразуем её:

$$\begin{cases} x^2+2x-3 \geqslant -4 \\ x^2+2x-3 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+1 \geqslant 0 \\ x^2+2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \geqslant 0 \\ x(x+2) < 0 \end{cases}$$

Первое неравенство выполняется при любом действительном x, поэтому вся система равносильна второму неравенству:

$$\begin{cases} (x+1)^2 \geqslant 0 \\ x(x+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x(x+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x(x+2) < 0$$

Решим его методом интервалов (рис. 1). Выражение $x(x + 2)$ обращается в ноль при $x = -2$ и при $x = 0$. Подстановкой конкретных чисел легко определить, что $x(x + 2)$ отрицательно при $-2 < x < 0$. Данный числовой промежуток и будет являться множеством решений исходного уравнения.

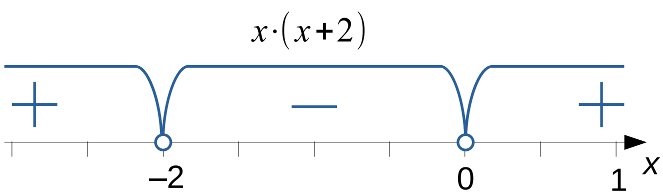

Рис. 1.

О т в е т

$x \in (-2; 0)$