Решите уравнение:

$$5\{x\}^2 - 28\{x\} + 15 = 0$$

(дробную часть числа x принято обозначать в фигурных скобках: $\{x\}$; функция $y = \{x\}$ определена на всём множестве действительных чисел, область её значений – полуинтервал $[0; 1)$, она является периодической функцией с периодом, равным 1).

Р е ш е н и е

Для решения уравнения сделаем замену переменной:

$$t = \{x\}$$

Получим:

$$5t^2 - 28t + 15 = 0$$

Найдём дискриминант этого квадратного уравнения:

$$D = (-28)^2 - 4\cdot 5\cdot 15 = 484 = 22^2$$

Соответственно $\sqrt{D} = \sqrt{22^2} = 22$. Находим корни уравнения:

$$t_1 = \frac{-(-28)-22}{2\cdot 5} = \frac{28-22}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$t_2 = \frac{28+22}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

Возвращаемся к старой переменной и получаем два требующих рассмотрения случая:

1) $\{x\} = \dfrac{3}{5}$

Простейшим решением данного уравнения является $\dfrac{3}{5}$, а с учётом периодичности функции дробной части выходит, что корнем будет любое число вида $x = \dfrac{3}{5} + k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\{x\} = 5$

По определению дробная часть числа – неотрицательная величина, не превосходящая единицы. Отсюда следует, что не существует такого числа, дробная часть которого была бы равна пяти и потому уравнение $\{x\} = 5$ не имеет решений.

О т в е т

$x = \dfrac{3}{5} + k$ $(k \in \mathbb{Z})$