

Решите уравнение:

$$44[x]\{x\}=[x]$$

(под целой частью числа x , обозначаемой при помощи квадратных скобок $[x]$, понимается наибольшее целое число, не превышающее заданное; дробная часть x обозначается фигурными скобками и определяется как разность между самим числом и его целой частью: $\{x\} = x - [x]$; область определения функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$ – всё множество действительных чисел, к тому же $y = \{x\}$ – периодическая функция с периодом, равным 1, а полуинтервал $[0; 1)$ является областью её значений).

Решение

Преобразуем исходное уравнение:

$$44[x]\{x\}=[x] \Leftrightarrow 44[x]\{x\} - [x] = 0 \Leftrightarrow [x] \cdot (44\{x\} - 1) = 0$$

Произведение двух множителей равно нулю, когда хотя бы один из них равен нулю. На основании этого уравнение будет равносильно объединению следующих двух:

$$[x] \cdot (44\{x\} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} [x] = 0 \\ 44\{x\} - 1 = 0 \end{cases}$$

Решим каждое из них по отдельности.

$$[x] = 0$$

Из определения целой части числа следует, что нулевую целую часть имеют неотрицательные числа, которые не превосходят единицы. Таким образом решениями уравнения $[x] = 0$ будут являться все x , принадлежащие полуинтервалу:

$$x \in [0; 1)$$

$$44\{x\} - 1 = 0$$

Перенесём единицу в правую часть уравнения, после чего поделим обе его части на 44. Получим:

$$\{x\} = \frac{1}{44}$$

Как легко догадаться, простейшим решением данного уравнения является $\frac{1}{44}$. Из периодичности функции дробной части вытекает, что любое число вида $x = \frac{1}{44} + k$, где k принадлежит множеству целых чисел \mathbb{Z} , также будет корнем уравнения $44\{x\} - 1 = 0$.

Множество решений исходного уравнения будет представлять объединение множеств решений уравнений $[x] = 0$ и $44\{x\} - 1 = 0$:

$$\begin{cases} x \in [0; 1) \\ x = \frac{1}{44} + k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Заметим, что корень $x = \frac{1}{44}$ (случай, когда $k = 0$) соответствует как второму, так и первому выражению в объединении – он находится внутри полуинтервала $[0; 1)$, поэтому при записи ответа на задачу эту точку можно из данного числового промежутка исключить.

О т в е т

$$x = \frac{1}{44} + k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad x \in \left[0; \frac{1}{44}\right) \cup \left(\frac{1}{44}; 1\right)$$