Школьные задачи / Алгебра / А-47

Даны два действительных числа a и b, такие, что $a < b$. Решите уравнение:

$$\frac{1}{x-a}\cdot\left[\frac{x-a}{b-a}\right]=0$$

(под целой частью числа x понимается наибольшее целое число, не превышающее заданное; её принято обозначать при помощи квадратных скобок: $[x]$; функция $y = [x]$ определена на всём множестве действительных чисел).

Р е ш е н и е

Из выражения заданного в условии задачи уравнения следует ограничение для возможных значений x: так как $(x - a)$ не может обращаться в ноль (стоит в знаменателе), то $x \neq a$. Таким образом множитель $\frac{1}{x-a}$ никогда не равен нулю и можно записать:

$$\frac{1}{x-a}\cdot\left[\frac{x-a}{b-a}\right]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq a \\ \left[\frac{x-a}{b-a}\right]=0 \end{cases}$$

Решение уравнения $\left[\frac{x-a}{b-a}\right]=0$ уже рассматривалось в задании А-46, поэтому

$$\begin{cases} x\neq a \\ \left[\frac{x-a}{b-a}\right]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq a \\ a\leqslant x<b \end{cases} \Leftrightarrow a < x < b$$

О т в е т

$x \in (a; b)$

К о м м е н т а р и й

Разобранное задание, а также результат упражнения А-46 позволяют предложить четыре уравнения, решениями которых являются известные школьникам типы числовых промежутков при $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$:

1) Отрезок $[a; b]$

$$(x-b)\cdot\left[\frac{x-a}{b-a}\right]=0$$

2) Интервал $(a; b)$

$$\frac{1}{x-a}\cdot\left[\frac{x-a}{b-a}\right]=0$$

3) Полуинтервал с «выколотой» на его конце точкой $[a; b)$

$$\left[\frac{x-a}{b-a}\right]=0$$

4) Полуинтервал с «выколотой» в его начале точкой $(a; b]$

$$\frac{x-b}{x-a}\cdot\left[\frac{x-a}{b-a}\right]=0$$

Подстановка конкретных значений a и b в данные уравнения позволяет создавать различные варианты заданий для учащихся (для проверочных и т. п. работ).