Школьные задачи / Алгебра / А-45

Найти значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{1-\left(\frac{|x|-1-||x|-1|}{2}+1\right)^2}\,dx$.

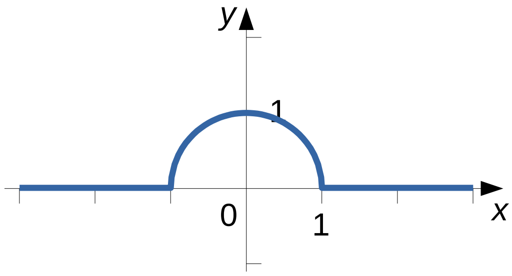
Решение

Построение графика подынтегральной функции

$$y(x)=\sqrt{1-\left(\frac{|x|-1-||x|-1|}{2}+1\right)^2}$$

рассматривалось в упражнении А-44 (рис. 1), в котором (со ссылкой на задание А-43) говорилось, что $y(x)$ определена при любом действительном x и было установлено следующее:

1) $y(x) = 0$ при $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$
2) $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ при $x \in [-1; 1]$



$$y=\sqrt{1-\left(\frac{|x|-1-||x|-1|}{2}+1\right)^2}$$

Рис. 1.

Для удобства обозначим искомый интеграл как I и представим в виде суммы:

$$I=\int_{-\infty}^{-1} y(x)\,dx+\int_{-1}^{1} y(x)\,dx+\int_{1}^{+\infty} y(x)\,dx$$

Так как при $x \in (-\infty; -1]$ и при $x \in [1; +\infty)$ значение $y(x)$ равно нулю, то $\int_{-\infty}^{-1} y(x)\,dx=0$ и $\int_{1}^{+\infty} y(x)\,dx=0$. Таким образом

$$I=\int_{-1}^{1} y(x)\,dx\,,$$

а с учётом п. 2):

$$I=\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

В соответствии со своим геометрическим смыслом определённый интеграл равен площади фигуры, ограниченной графиком подынтегральной функции и осью абсцисс. График $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ при $x \in [-1; 1]$ есть «верхняя» половина окружности $x^2 + y^2 = 1^2$, следовательно, ограничиваемой фигурой является половина круга с радиусом $R = 1$ и значение интеграла I равняется половине площади такого круга. Окончательно имеем:

$$I=\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot R^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

Ответ

$\frac{\pi}{2}$