Школьные задачи / Алгебра / А-43

Решите неравенство:

$$\left|\frac{|x|-1-\big||x|-1\big|}{2}+1\right|\leqslant 1$$

Р е ш е н и е

Решение удобно выполнять, начав с раскрытия модуля $\big||x|-1\big|$:

$$\left|\frac{|x|-1-\big||x|-1\big|}{2}+1\right|\leqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|-1\geqslant 0\\ \left|\dfrac{|x|-1-(|x|-1)}{2}+1\right|\leqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}|x|-1<0\\ \left|\dfrac{|x|-1-(1-|x|)}{2}+1\right|\leqslant 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\geqslant 1\\ \left|\dfrac{|x|-1-|x|+1}{2}+1\right|\leqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}|x|<1\\ \left|\dfrac{|x|-1-1+|x|}{2}+1\right|\leqslant 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\geqslant 1\\ \left|\dfrac{0}{2}+1\right|\leqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}|x|<1\\ \left|\dfrac{2|x|-2}{2}+1\right|\leqslant 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\geqslant 1\\ x\in\mathbb{R}\end{cases}\\ \begin{cases}|x|<1\\ \big||x|-1+1\big|\leqslant 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|\geqslant 1\\ \begin{cases}|x|<1\\ \big||x|\big|\leqslant 1\end{cases}\end{array}\right.$$

Присмотримся к получившейся в объединении системе

$$\begin{cases}|x|<1\\ \big||x|\big|\leqslant 1\end{cases}$$

более внимательно. Дело в том, что если первое неравенство верно, то второе $\big||x|\big|\leq 1$ в этом случае выполняется автоматически. Отсюда следует, что

$$\begin{cases}|x|<1\\ \big||x|\big|\leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow |x|<1$$

Значит:

$$\left[\begin{array}{l}|x|\geqslant 1\\ \begin{cases}|x|<1\\ \big||x|\big|\leqslant 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|\geqslant 1\\ |x|<1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|\geqslant 1\\ -1<x<1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leqslant -1\\ x\geqslant 1\\ -1<x<1\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$$

Полученный результат говорит о том, что исходное неравенство выполняется при любом действительном x.

О т в е т

$x\in\mathbb{R}$