Школьные задачи / Алгебра / А-42

Найти значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\left||x|-1\right|-(|x|-1)\right)dx$.

Р е ш е н и е

В упражнении А-5 выполнялось построение графика функции $y(x) = \left|\,|x| - 1\right| - (|x| - 1)$. Тогда было установлено следующее (рис. 1):

1) $y(x) = 0$ при $x \in (-\infty; -1]\cup[1; +\infty)$

2) $y(x) = 2x + 2$ при $x \in [-1; 0]$

3) $y(x) = 2 - 2x$ при $x \in [0; 1]$

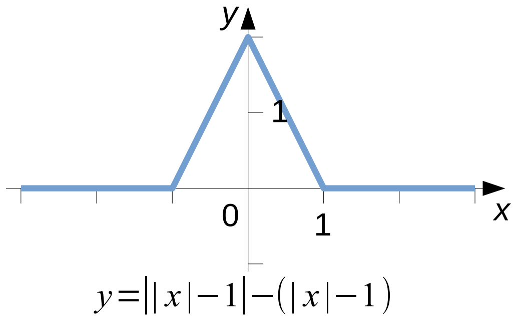

Рис. 1.

Обозначим для удобства $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(x)\,dx$. Представим значение I в виде суммы:

$$I=\int\limits_{-\infty}^{-1} y(x)\,dx+\int\limits_{-1}^{1} y(x)\,dx+\int\limits_{1}^{+\infty} y(x)\,dx$$

Так как при $x \in (-\infty; -1]$ и при $x \in [1; +\infty)$ значение $y(x)$ равно нулю, то из этого следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} y(x)\,dx=0 \text{ и } \int\limits_{1}^{+\infty} y(x)\,dx=0$$

Таким образом

$$I=\int\limits_{-1}^{1} y(x)\,dx$$

Вычислить последний интеграл можно разными способами.

<u>Способ 1</u>

Представим I как сумму:

$$I=\int\limits_{-1}^{1} y(x)\,dx=\int\limits_{-1}^{0} y(x)\,dx+\int\limits_{0}^{1} y(x)\,dx$$

С учётом пп. 2) и 3) (см. выше) можно записать:

$$I=\int\limits_{-1}^{0}(2x+2)\,dx+\int\limits_{0}^{1}(2-2x)\,dx$$

Для вычисления этих интегралов воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$I=\int\limits_{-1}^{0}(2x+2)\,dx+\int\limits_{0}^{1}(2-2x)\,dx=\left.(x^2+2x)\right|_{-1}^{0} + \left.(2x-x^2)\right|_{0}^{1}=$$
$$= (0^2 + 2\cdot0) - ((-1)^2 + 2\cdot(-1)) + (2\cdot1 - 1^2) - (2\cdot0 - 0^2) = 2$$

<u>Способ 2</u>

В соответствии со своим геометрическим смыслом интеграл I равен площади фигуры, ограниченной графиком функции $y(x)$ и осью абсцисс. Из рис. 1 видно, что данная фигура представляет собой равнобедренный треугольник с основанием 2 и высотой 2. Отсюда

$$I = \frac{1}{2}\cdot2\cdot2 = 2$$

О т в е т

2

К о м м е н т а р и й

Существует и третий способ вычисления интеграла

$$I = \int_{-1}^{1} y(x)\,dx$$

Функцию $y(x)$ на отрезке [–1; 1] можно представить в виде

$$y = 2 - 2\cdot|x|$$

Поскольку первообразная модуля* есть (C – произвольное число)

$$\int |x|\,dx = \frac{x\cdot|x|}{2} + C\ ,$$

то имеем

$$I = \int_{-1}^{1} (2 - 2|x|)\,dx = \left(2x - 2\cdot\frac{x\cdot|x|}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = (2x - x\cdot|x|)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= (2\cdot1 - 1\cdot|1|) - (2\cdot(-1) - (-1)\cdot|-1|) = 2$$

* См. заметку «Модуль. Производная и интеграл» (URL: https://shurichimik.narod.ru/consideration/04module/module.htm).