Школьные задачи / Алгебра / А-41

Найти значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(x)\,dx$, если $y(x) = \frac{1}{2}\cdot(|x^2-1| - (x^2-1))$.

Р е ш е н и е

Обозначим для удобства $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(x)\,dx$. В задаче А-4 выполнялось построение графика функции $y(x)$ (рис. 1) и было установлено следующее:

1) $y(x) = 0$ при $x \in (-\infty; -1]\cup[1; +\infty)$

2) $y(x) = 1 - x^2$ при $x \in [-1; 1]$

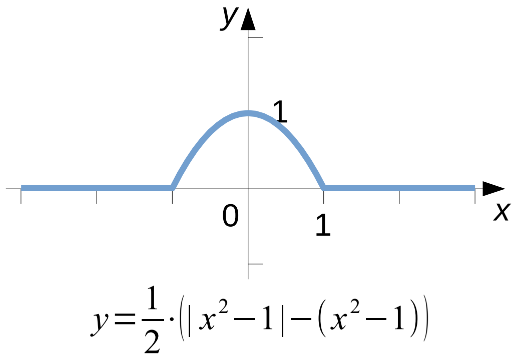

Рис. 1.

Представим значение I в виде суммы:

$$I=\int\limits_{-\infty}^{-1} y(x)\,dx+\int\limits_{-1}^{1} y(x)\,dx+\int\limits_{1}^{+\infty} y(x)\,dx$$

Так как при $x \in (-\infty; -1]\cup[1; +\infty)$ значение $y(x)$ равно нулю, то $\int\limits_{-\infty}^{-1} y(x)\,dx=0$ и $\int\limits_{1}^{+\infty} y(x)\,dx=0$. Таким образом $I=\int\limits_{-1}^{1} y(x)\,dx$. С учётом того, что на отрезке $[-1;\ 1]$ выполняется равенство $\frac{1}{2}\cdot(|x^2-1| - (x^2-1)) = 1 - x^2$, получаем: $I=\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx$. Вычислим этот интеграл, воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница:

$$I=\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(1-\frac{1^3}{3}\right)-\left((-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

О т в е т

$\frac{4}{3}$

К о м м е н т а р и й

В курсе средней школы понятие несобственного интеграла обычно не рассматривается, хотя оно относительно простое, фактически это предельное значение определённого интеграла. Например:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\left(\int\limits_{1}^{A}\frac{1}{x^2}dx\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{A}\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(\left(-\frac{1}{A}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{A}+1\right)=1$$

Несобственный интеграл можно разделять на сумму нескольких. К примеру, в случае т. н. интеграла Эйлера-Пуассона это может выглядеть так:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-x^2}dx+\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$