Решите уравнение:

$$[x] = [x]^2$$

(под целой частью числа x понимается наибольшее целое число, не превышающее заданное; её принято обозначать при помощи квадратных скобок: $[x]$; функция $y = [x]$ определена на всём множестве действительных чисел).

Р е ш е н и е

Сделаем замену переменной:

$$t = [x]$$

В этом случае исходное уравнение преобразуется к виду:

$$t = t^2 \;\Leftrightarrow\; t^2 - t = 0 \;\Leftrightarrow\; t\cdot(t-1) = 0$$

Произведение нескольких множителей равно нулю, когда хотя бы один из них равен нулю. Получаем, что или

$$t = 0$$

или

$$t - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 1$$

Возвращаясь к старой переменной получаем два варианта:

1) $[x] = 0$

Целая часть равна нулю для чисел больших или равных нулю, но меньших единицы, то есть исходному уравнению в рассматриваемом случае будут удовлетворять все числа полуинтервала $x \in [0; 1)$.

2) $[x] = 1$

Целая часть равна единице для чисел больших или равных 1, но меньших 2, то есть решениями исходного уравнения в данном случае будут все числа полуинтервала $x \in [1; 2)$.

Оба получившихся полуинтервала можно объединить в один, который и будет решением уравнения: $x \in [0; 2)$.

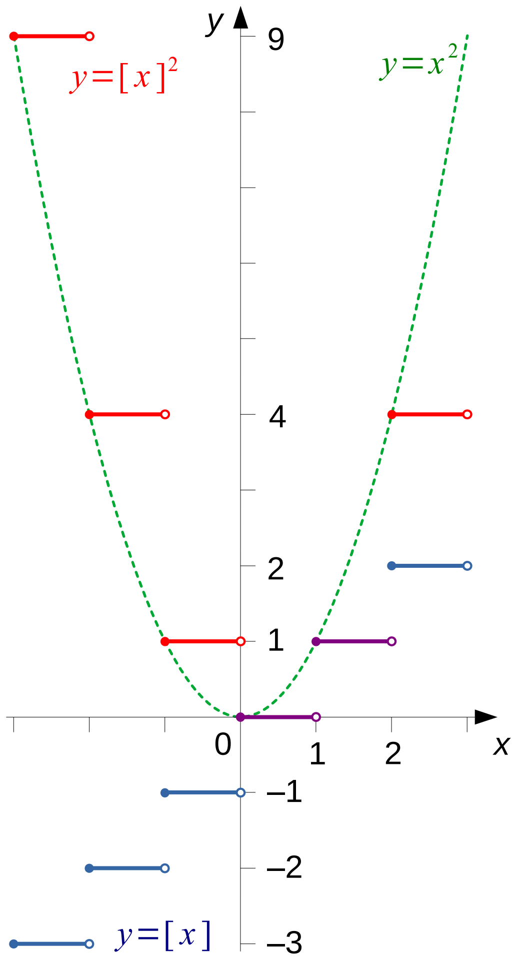

Рис. 1.

О т в е т

$x \in [0; 2)$.

К о м м е н т а р и й

Альтернативный способ нахождения корней рассмотренного уравнения – графический, при его использовании нужно отыскать общие точки графиков функций $y = [x]$ и $y = [x]^2$. Этот вариант решения был фактически продемонстрирован в разборе решения задачи А-35 – на рис. 1 пересечение графиков функций показано фиолетовым цветом.

Вполне достойно внимания и ещё одно обстоятельство: решения уравнения образуют не конечный набор конкретных чисел, а непрерывное множество (полуинтервал), что обусловлено особенностью функции целой части числа. К слову: уравнение $[y] = [x]$ также описывает совокупность областей на плоскости, а не линий (см. задачу А-30).