Школьные задачи / Алгебра / А-39

Под целой частью числа x (обозначается при помощи квадратных скобок $[x]$) понимается наибольшее целое число, не превышающее заданное. Дробная часть x обозначается фигурными скобками и определяется как разность между самим числом и его целой частью: $\{x\} = x - [x]$. Область определения функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$ – всё множество действительных чисел, к тому же $y = \{x\}$ является периодической функцией с периодом, равным 1, а область её значений – полуинтервал $[0; 1)$. На основании данной информации построить график функции:

$$y=\left[\{x\}-\frac{1}{2}\right]$$

Решение

В процессе решения задачи А-17 был построен график функции $y_1 = \{x\} - \dfrac{1}{2}$ (рис. 1).

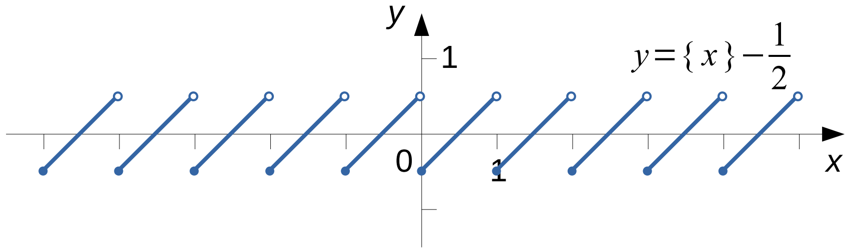


Рис. 1.

Данная функция, как и $y = \{x\}$, является периодической (период $T = 1$), а область её значений – полуинтервал $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$. Из периодичности y_1 следует такая же периодичность и заданной в условии задачи функции $y(x) = \left[\{x\}-\dfrac{1}{2}\right]$:

$$\left[\{x+k\}-\frac{1}{2}\right]=\left[\{x\}-\frac{1}{2}\right],\ (k\in\mathbb{Z})$$

Благодаря этому достаточно построить график $y(x)$, например, на промежутке $[0; 1)$, а затем кратно периоду параллельно перенести вправо и влево вдоль оси абсцисс.

Заметим, что $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left[\left\{\dfrac{1}{2}\right\}-\dfrac{1}{2}\right]=\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right] = [0] = 0$, поэтому для удобства разобьём множество значений аргумента на полуотрезке $[0; 1)$ на следующие две части:

1) $0\leqslant x<\dfrac{1}{2}$

На этом промежутке $-\dfrac{1}{2}\leqslant y_1 < 0$ (рис. 2), следовательно $y(x) = [y_1] = -1$, и её график здесь представляет собой прямолинейный фрагмент, совпадающий с линией $y = -1$.

2) $\dfrac{1}{2} < x < 1$

На данном интервале $0 < y_1 < \dfrac{1}{2}$ и поэтому график $y(x)$ совпадает с осью абсцисс, так как $y(x) = [y_1] = 0$.

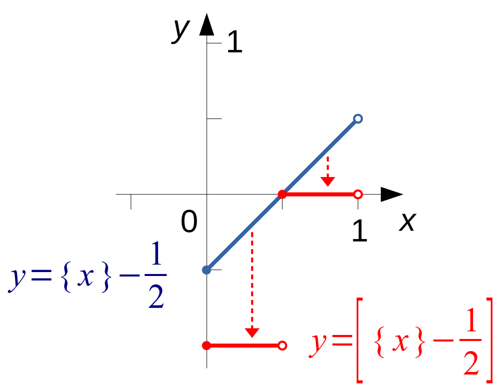
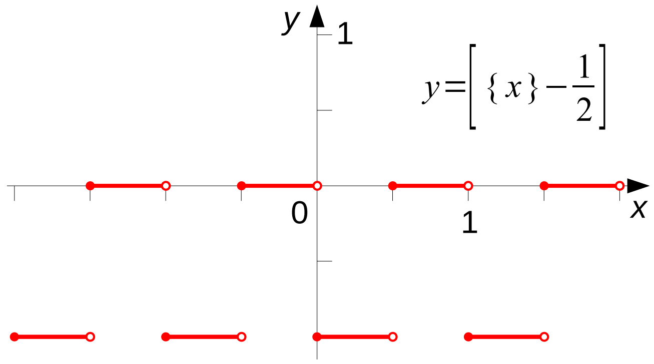


Рис. 2.

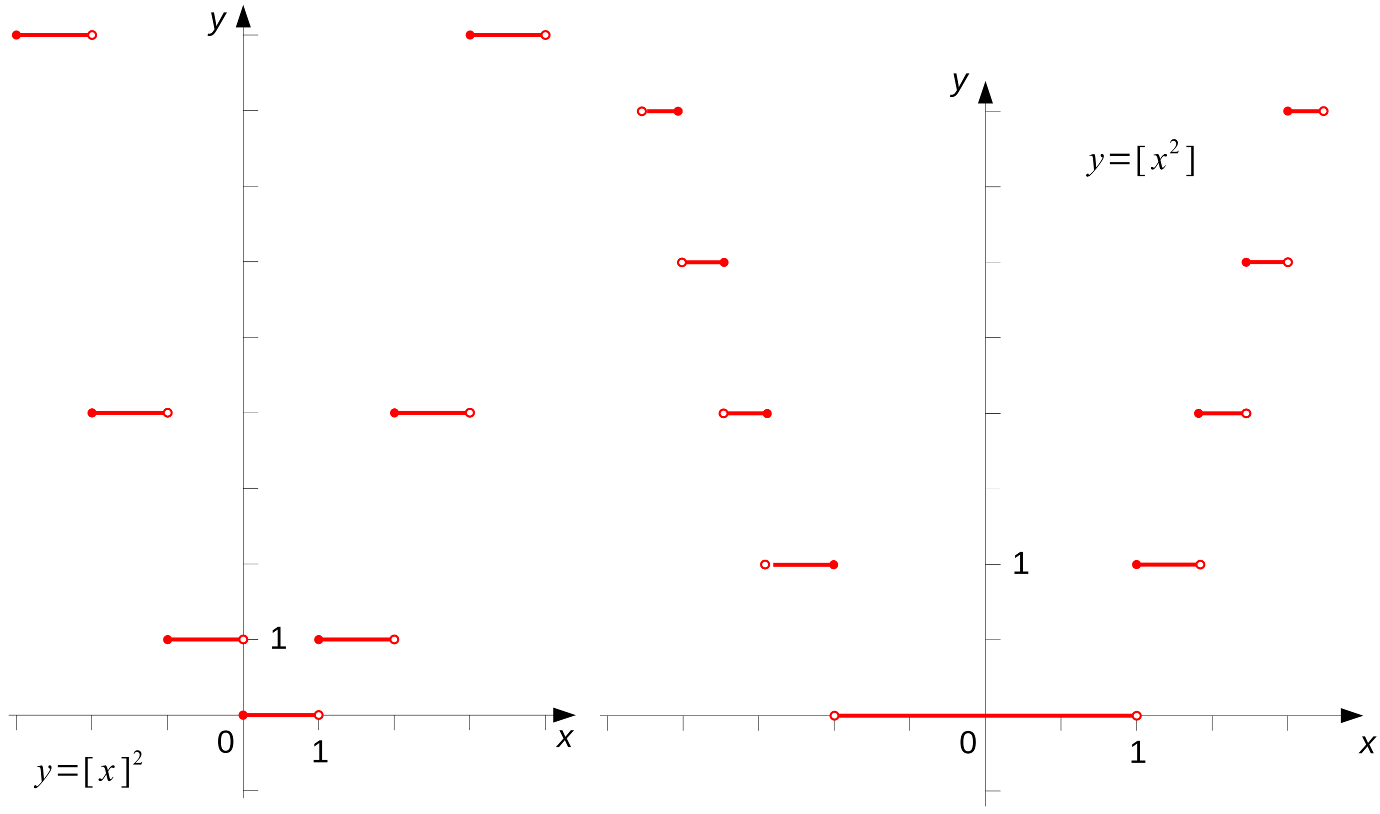
Для завершения построения полученную часть графика функции $y(x)$ остаётся «размножить» в соответствии с её периодичностью.

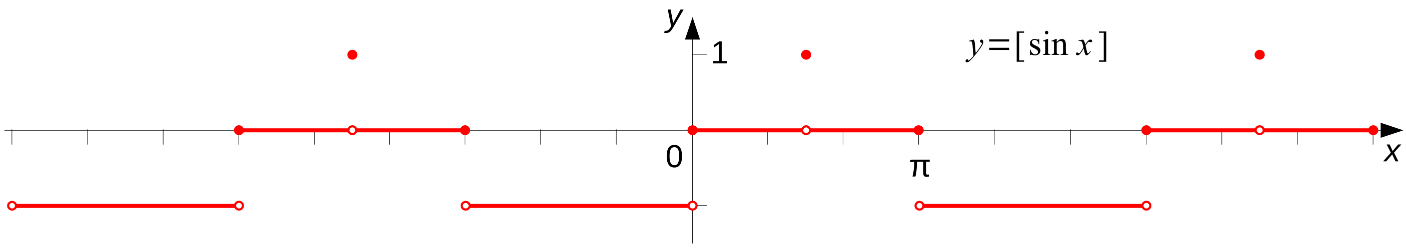
О т в е т



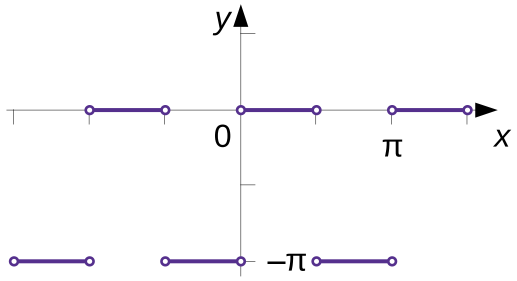
К о м м е н т а р и й

В этой и других задачах, где фигурировала целая часть числа (А-35, А-36, А-37) легко заметить общий характер «действия» квадратных скобок на вид графика содержащего их выражения функции: они делают линию «рваной», разбивая её на горизонтальные фрагменты, а в случае с $y = [\sin x]$ (упражнение А-37) получается ещё и регулярно повторяющаяся «одинокая» точка:





Относительно же разобранного здесь задания обращает на себя внимание похожесть полученного в ответе графика на график функции $y_2(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) - \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ (см. упражнение А-38):



$y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) - \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$

Указанное сходство можно «усилить», модифицировав функции так:
1) «Растянем» $y(x)$ в два раза вдоль оси абсцисс:

$$y_3(x) = \left[\left\{\frac{x}{2}\right\} - \frac{1}{2}\right]$$

2) Поскольку период у $y_3(x)$ составляет $T = 2$, то модифицируем $y_2(x)$ так, чтобы и у неё период стал таким же. Для этого «сожмём» её график в $\frac{\pi}{2}$ раз вдоль оси абсцисс:

$$y_4(x) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)\right) - \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)\right)$$

3) Сдвинем график $y_4(x)$ на единицу вправо:

$$y_5(x) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot (x-1)\right)\right) - \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot (x-1)\right)\right)$$

4) «Сожмём» график $y_5(x)$ в π раз по оси ординат:

$$y_6(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot (x-1)\right)\right) - \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot (x-1)\right)\right)\right)$$

Графики функций $y_3(x)$ и $y_6(x)$ совпадают за исключением точек, соответствующих целым значениям аргумента. Получается, что при любых $x \notin \mathbb{Z}$ верно вот такое необычное равенство (для простоты формулировки условия равенства двух функций как раз и понадобилось «растягивание» $y(x)$):

$$\pi \cdot \left[\left\{\frac{x}{2}\right\} - \frac{1}{2}\right] = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot (x-1)\right)\right) - \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot (x-1)\right)\right)$$

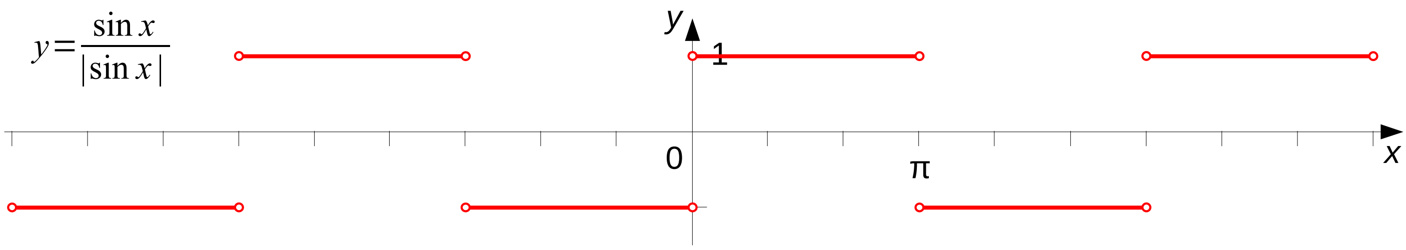
Это, если угодно, ещё одно свидетельство своеобразной связи тригонометрических функций с функцией дробной части числа*, только в этой раз она ещё и в «связке» с функцией целой части.

Важно отметить, что отталкиваясь от вида графика $y(x)$ несложно подобрать ещё одну функцию, тоже «почти» совпадающую с $y_2(x)$. В качестве основы здесь подходит вот такая:

$$y_7 = \frac{\sin x}{|\sin x|} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\pi k < x < \pi(2k+1) \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \pi(2k+1) < x < 2\pi(k+1) \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right., \ (k \in \mathbb{Z})$$

График её приведён ниже:

* См. заметку «О взаимосвязи тригонометрических функций и функции дробной части числа» (URL: https://shurichimik.narod.ru/consideration/51-tri-frac/51-trigono-fraction.htm).



Проводя с графиками операции, подобные описанным выше, можно при желании $y_7(x)$ «состыковать» с $y(x)$ и получить равенство, верное за исключением случаев когда $x \in \mathbb{Z}$:

$$\left[\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right]=-\frac{1}{2}-\frac{\sin \pi x}{2|\sin \pi x|}$$

Аналогично можно «состыковать» и $y_7(x)$ с $y_2(x)$, причём так, чтобы у них ещё и области определения одинаковые оказались (получившееся при этом равенство будет верным при $x \neq \frac{\pi}{2} \cdot k$, где k – целое число):

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)-\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\sin 2x}{|\sin 2x|}-1\right)$$

© Широков Александр, 19.08.2024