Школьные задачи / Алгебра / А-38

Построить график функции:

$$y = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) - \mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x)$$

Решение

Построение графика $y_1(x) = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\ x)$ рассматривалось в задаче А-33 (рис. 1). В комментарии к ней был приведён график функции $y_2(x) = \mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\ x)$, который строится с использованием тех же рассуждений (установление области определения функции, её периодичности и эквивалентности линейной функции внутри границ периода), что и $y_1(x)$ (рис. 2).

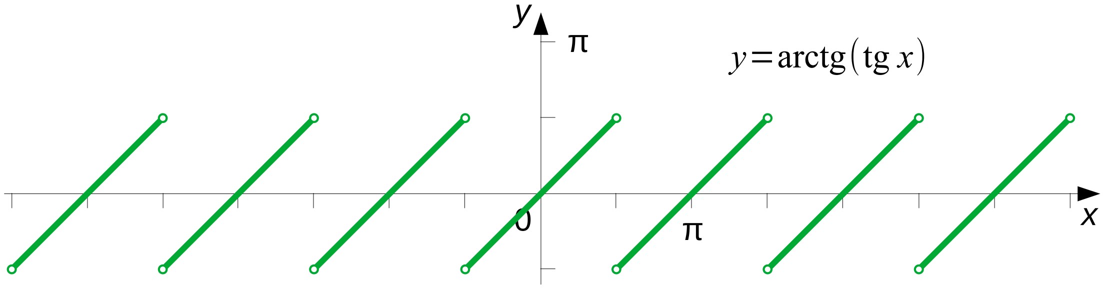


Рис. 1.

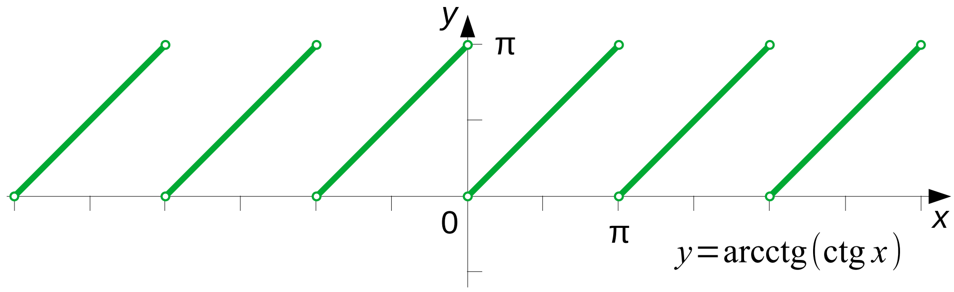


Рис. 2.

В нашем случае требуется построить график функции

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

Отметим, что графики как $y_1(x)$, так и $y_2(x)$ представляют собой последовательности линейных фрагментов, наклонённых под углом 45° по отношению к положительному направлению оси абсцисс.

Поскольку $y_1(x)$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, а $y_2(x)$ имеет смысл при $x \neq \pi n$, то областью определения $y(x)$ являются все точки числовой оси, для которых выполняется условие $x \neq \frac{\pi n}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Легко заметить, что

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(x + \pi n)) - \mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}(x + \pi n)) = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) - \mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x)$$

Иными словами $y(x + \pi n) = y(x)$ и заданная в условии функция является периодической с периодом $T = \pi$. Для построения её графика достаточно построить его на отрезке значений аргумента длиной π, а затем кратно периоду параллельно перенести вправо и влево вдоль оси абсцисс.

Выберем интервал $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Зная характер линий графиков $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удобно интервал разбить на два и рассмотреть поведение $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ на каждом из них по отдельности, тем более что при $x = 0$ функция не определена.

1) $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$

На этом числовом промежутке $y_1(x)$ совпадает с графиком функции $y = x$, а $y_2(x)$ совпадает с $y = x + \pi$, следовательно $y(x) = x - (x + \pi) = x - x - \pi = -\pi$.

2) $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$

Здесь графики $y_1(x)$ и $y_2(x)$ совпадают с графиком функции $y = x$, значит в данном случае $y(x) = x - x = 0$.

Изобразим полученные результаты на координатной плоскости (рис. 3).

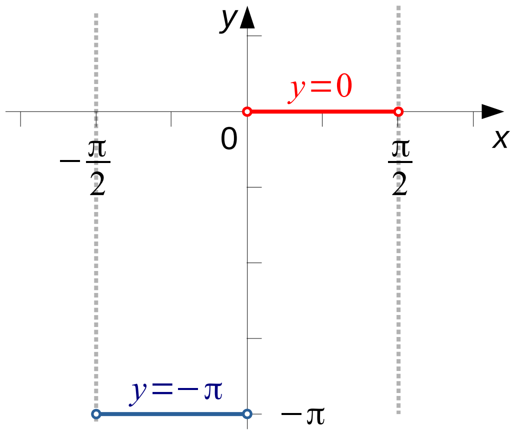


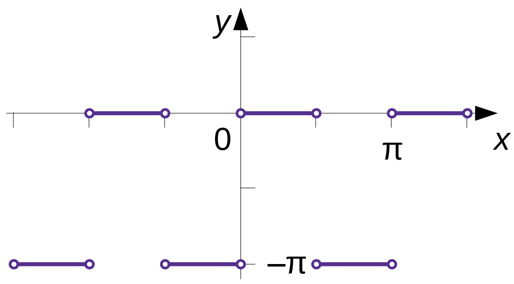
Рис. 3.

Теперь остаётся принять во внимание периодичность $y(x)$ из которой следует, что график функции

$$y = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) - \mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x)$$

представляет собой бесконечную череду из линейных горизонтальных фрагментов длиной $\frac{\pi}{2}$ каждый, поочерёдно располагающихся на уровне $y = 0$ и $y = -\pi$.

О т в е т



$$y = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) - \mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x)$$