Школьные задачи / Алгебра / А-37

Построить график функции:

$$y = [\sin x]$$

(под целой частью числа x понимается наибольшее целое число, не превышающее заданное; её принято обозначать при помощи квадратных скобок: $[x]$; функция $y = [x]$ определена на всём множестве действительных чисел).

Решение

Поскольку функции синуса и целой части числа определены при любых действительных значениях аргумента, то из этого следует, что $y(x) = [\sin x]$ также имеет смысл $\forall\ x \in \mathbb{R}$. В силу периодичности синуса (период $T = 2\pi$)

$$[\sin(x + 2\pi k)] = [\sin x],$$

где $k \in \mathbb{Z}$, и $y(x)$ тоже периодическая ($T = 2\pi$), следовательно достаточно построить её график на отрезке значений аргумента длиной 2π, а затем кратно периоду параллельно перенести его вправо и влево вдоль оси абсцисс.

Пусть это будет отрезок $[0; 2\pi]$. Заметим, $[\sin 0] = [\sin \pi] = 0$. Обозначим эти точки сразу на графике (рис. 1), помня, что в силу периодичности ещё и $[\sin 0] = [\sin 2\pi] = 0$. Для удобства разделим отрезок $[0; 2\pi]$ на два числовых промежутка:

1) $0 < x < \pi$. На этом интервале есть точка $x = \dfrac{\pi}{2}$. В ней $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$ и, соответственно, $\left[\sin \dfrac{\pi}{2}\right] = 1$, во всех остальных случаях $0 < \sin x < 1$ и потому $[\sin x] = 0$. Образно выражаясь, при действии квадратных скобок на данную часть синусоиды её точки (кроме одной) «осыпаются» на ось абсцисс, образуя прямолинейный отрезок с «проколом» посередине.

2) $\pi < x < 2\pi$. На этом интервале $-1 < \sin x < 0$, поэтому $[\sin x] = -1$, то есть здесь от квадратных скобок синусоида «осыпается» до уровня линии $y = -1$, также образуя горизонтальный линейный фрагмент (рис. 1).

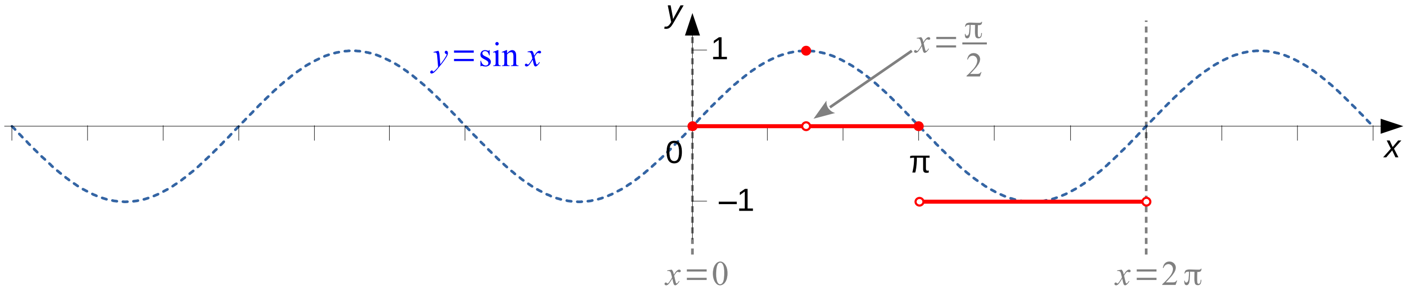

Рис. 1.

Для завершения построения полученную часть графика функции $y(x)$ остаётся «размножить» в соответствии с её периодичностью.

Ответ