Школьные задачи / Алгебра / А-36

Построить график функции:

$$y = [x^2]$$

(под целой частью числа x понимается наибольшее целое число, не превышающее заданное; её принято обозначать при помощи квадратных скобок: $[x]$; функция $y = [x]$ определена на всём множестве действительных чисел).

Р е ш е н и е

Для $y(x) = [x^2]$ определение значения y для каждого конкретного x состоит из двух этапов: возведения аргумента в квадрат и нахождения целой части у получившегося числа.

Заметим, что

$$[(-x)^2] = [x^2],$$

то есть $y(x)$ является чётной функцией ($y(-x) = y(x)$) и её график симметричен относительно оси ординат.

Для удобства построения сначала изобразим график функции $y_1 = x^2$, а затем добавим к нему линии, соответствующие графикам функций $y = n$, где n – целое неотрицательное число (рис. 1).

Рассмотрим теперь часть правой ветки параболы $y_1 = x^2$, заключённую между линиями $y = n$ и $y = n + 1$. Как нетрудно догадаться, данному фрагменту кривой соответствует интервал значений аргумента

$$\sqrt{n} < x < \sqrt{n+1} .$$

Отсюда:

$$n < x^2 < n + 1.$$

Заметим, что

$$y(x) = [y_1] \quad \text{и} \quad y(\sqrt{n}) = [(\sqrt{n})^2] = [n] = n .$$

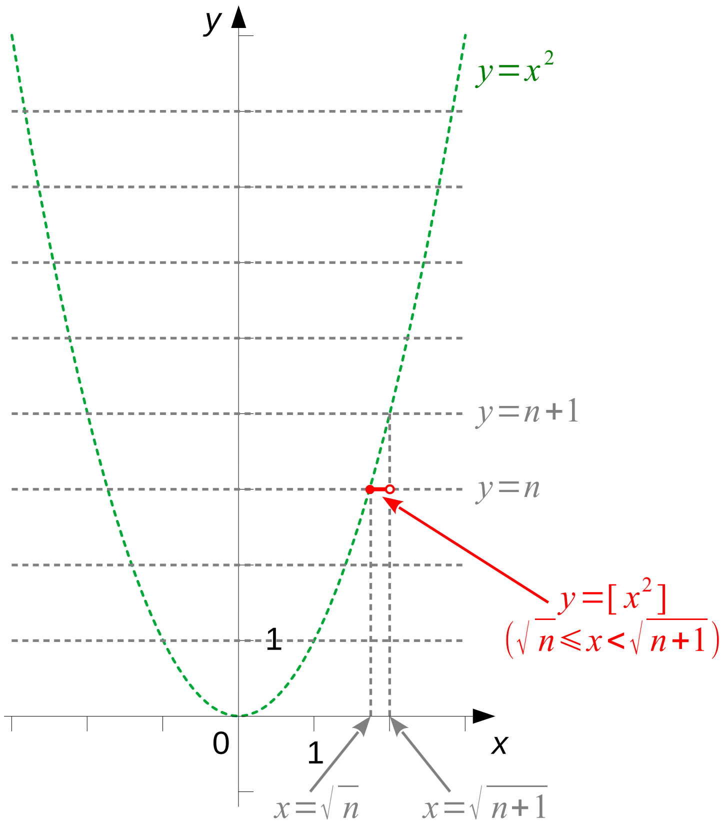

Рис. 1.

Таким образом имеем: $y(x) = n$ при $x \in [\sqrt{n}\,;\ \sqrt{n+1})$. Образно выражаясь, это означает, что под действием квадратных скобок на рассматриваемый фрагмент параболы её точки «осыпаются» на уровень линии $y = n$, образуя горизонтальный полуотрезок. Помня о чётности $y(x)$ можно заключить, что аналогичный полуотрезок получится и при $x \in (-\sqrt{n+1}\,;\ -\sqrt{n}\,]$. Последовательный перебор значений n (0, 1, 2, 3, …) позволяет поэтапно изобразить график $y = [x^2]$, который таким образом представляет совокупность горизонтально ориентированных линейных фрагментов переменной длины, располагающихся на уровнях, соответствующих целым неотрицательным значениям ординат.

О т в е т