Построить график функции:

$$y = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$$

Р е ш е н и е

Построение графиков функций $y_1(x) = \arcsin(\sin x)$ и $y_2(x) = \arccos(\cos x)$ рассматривалось ранее в упражнениях А-31 и А-32 соответственно. Оба графика представляют собой ломаные линии, состоящие из прямолинейных фрагментов (рис. 1, 2).

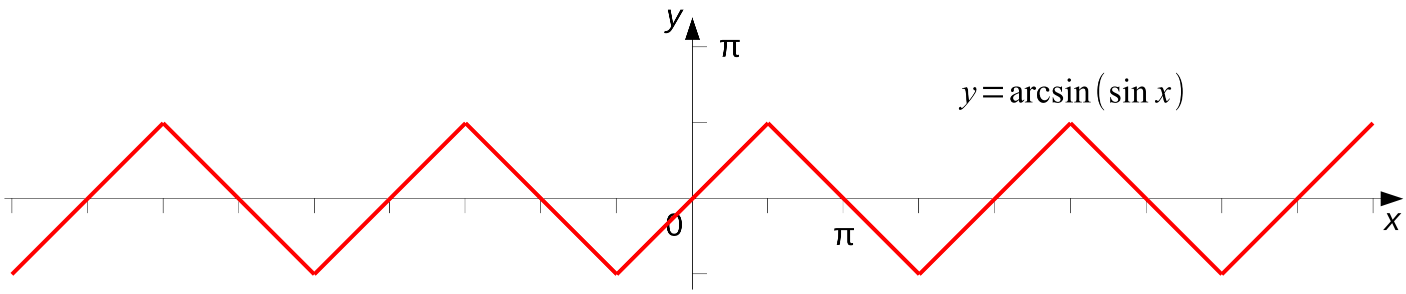



Рис. 1.

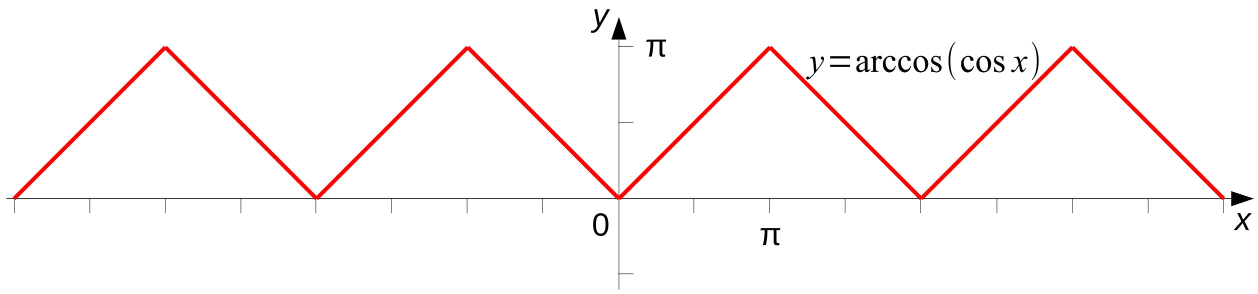



Рис. 2.

В нашем случае требуется построить график функции

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ определены при $x \in \mathbb{R}$, то областью определения $y(x)$ тоже является всё множество действительных чисел.

Легко заметить, что

$$\arcsin(\sin(x+2\pi n)) + \arccos(\cos(x+2\pi n)) = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x), \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

Таким образом $y(x+2\pi n) = y(x)$ и заданная функция является периодической с периодом $T = 2\pi$. Для построения её графика достаточно построить его на отрезке значений аргумента длиной $2\pi$, а затем кратно периоду параллельно перенести его вправо и влево вдоль оси абсцисс. Пусть это будет отрезок $[0; 2\pi]$.

Зная характер линий графиков $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удобно отрезок $[0; 2\pi]$ разбить на четыре отрезка и рассмотреть поведение $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ на каждом из них по отдельности.

1) $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

На этом отрезке графики $y_1(x)$ и $y_2(x)$ совпадают с графиком функции $y = x$, следовательно, в данном случае $y(x) = x + x = 2x$ .

2) $x \in \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$

На этом числовом промежутке $y_2(x)$ совпадает с графиком функции $y = x$, а $y_1(x)$ совпадает с $y = \pi - x$, значит $y(x) = \pi - x + x = \pi$.

3) $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

Здесь $y_1(x) = \pi - x$, а $y_2(x)$ совпадает с $y = 2\pi - x$. Отсюда $y(x) = \pi - x + 2\pi - x = 3\pi - 2x$.

4) $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$

В данном случае $y_1(x) = x - 2\pi$, а $y_2(x) = 2\pi - x$, тогда $y(x) = x - 2\pi + 2\pi - x = 0$.

Изобразим полученные результаты на координатной плоскости (рис. 3).

Теперь остаётся принять во внимание периодичность $y(x)$ из которой следует, что график функции

$$y = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$$

представляет собой бесконечную ломаную линию, состоящую из трапецевидных фрагментов.

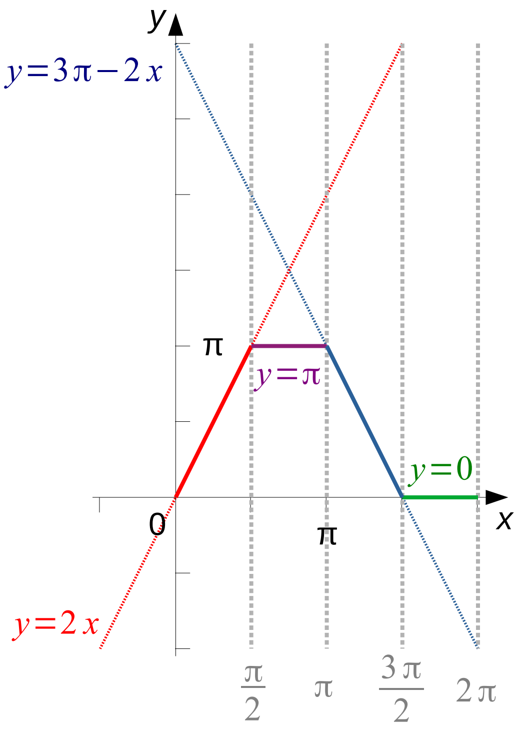
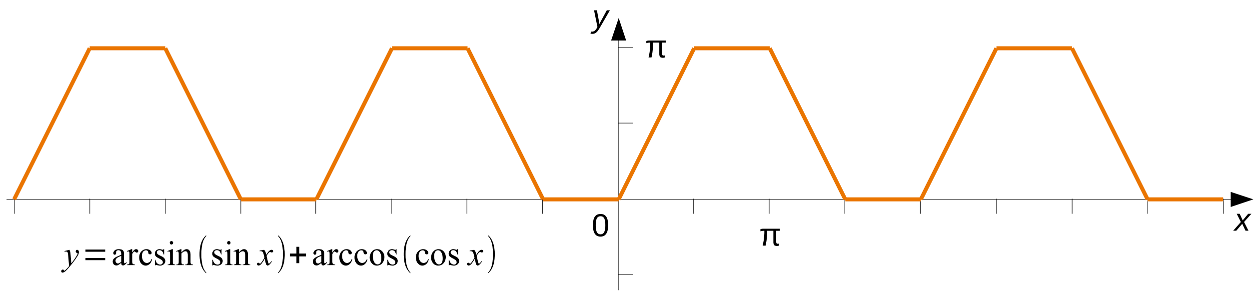



Рис. 3.

О т в е т




К о м м е н т а р и й

То, что графики функций $y_1(x) = \arcsin(\sin x)$ и $y_2(x) = \arccos(\cos x)$ действительно состоят из прямолинейных фрагментов, можно показать способом, отличным от рассмотренного ранее в задачах А-31 и А-32. Рассмотрим его на примере $y_1(x)$. Найдём производную этой функции:

$$y'_1(x) = (\arcsin(\sin x))' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)^2}} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|}$$

Для нахождения конкретных значений производной раскроем модуль:

$$y'_1(x) = \frac{\cos x}{|\cos x|} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos x \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \cos x > 0 \\ y'_1(x) = \dfrac{\cos x}{\cos x} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \cos x < 0 \\ y'_1(x) = \dfrac{\cos x}{-\cos x} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ y'_1(x) = 1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k \\ y'_1(x) = -1 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \\ y'_1(x) = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) \\ y'_1(x) = -1 \end{cases} \end{array} \right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Если говорить проще, то $y'_1(x)$ равна единице, когда $\cos x > 0$, и равна –1, если $\cos x < 0$. В точках, когда $\cos x = 0$ функция $\arcsin(\sin x)$ производной не имеет.

Рассмотрим теперь какую-нибудь область значений аргумента. Пусть это будет интервал $\left(\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$. На нём $y'_1(x) = -1$. Вообще

$$\int (-1)\,dx = -x + C$$

($C$ – константа интегрирования, т. е. произвольное постоянное число). Данное обстоятельство как раз и говорит о том, что функция $\arcsin(\sin x)$ на рассматриваемом интервале ведёт себя именно как линейная функция, ведь если производные двух функций равны (а $(-x + C)' = -1$, как и $y'_1(x)$), то их первообразные отличаются друг от друга на постоянную величину. В рассматриваемом конкретном случае при $x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$ величина $C = \pi$ и

$$\arcsin(\sin x) = -x + \pi$$