Построить график функции:

$$y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$$

Решение

Найдём сначала область определения $y(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$. Арктангенс определён при любом действительном значении аргумента, а тангенс не существует при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), из чего следует, что $y(x)$ имеет смысл при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Тангенс и арктангенс – нечётные функции, поэтому

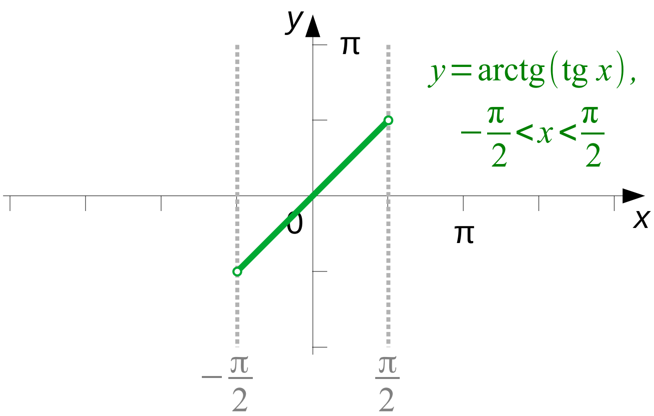
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-x)) = \operatorname{arctg}(-\operatorname{tg} x) = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$$

Таким образом, $y(x)$ является нечётной ($y(-x) = -y(x)$) и её график симметричен относительно начала координат.

Из периодичности тангенса следует, что выполняется равенство

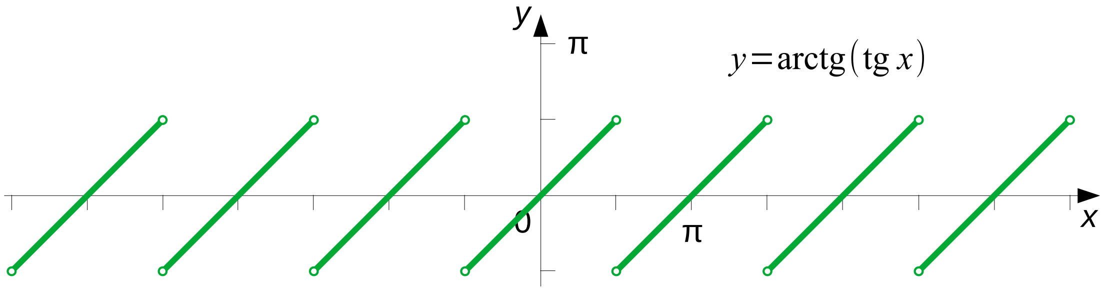
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x + \pi n)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \ (n \in \mathbb{Z}),$$

то есть $y(x)$ также является периодической функцией с периодом $T = \pi$. Это означает, что для построения её графика достаточно построить его на отрезке значений аргумента длиной π, а затем его кратно периоду параллельно перенести вправо и влево вдоль оси абсцисс. С учётом нечётности $y(x)$ удобно выбрать интервал $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ – рассмотрим $y(x)$ на нём. Арктангенс по определению – число от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен заданной величине. В $y(x)$ аргументом арктангенса является $\operatorname{tg} x$, а поскольку арктангенс – функция обратная тангенсу, это означает, что на рассматриваемом интервале выражение $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ возвращает значение самого x. Иными словами при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеем, что график $y(x)$ полностью совпадает с графиком линейной функции $y = x$:



Остаётся принять во внимание периодичность $y(x)$ и сделать вывод, что график функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ представляет собой бесконечную череду линейных фрагментов, наклонённых под углом 45° по отношению к положительному направлению оси абсцисс.

О т в е т



К о м м е н т а р и й

Ход решения рассмотренной выше задачи весьма сходен с разбором упражнения А-32. Чуть более «заковыристым» было построение графика из задачи А-31. В традиционной «тригонометрической четвёрки» функций синус / косинус / тангенс / котангенс неохваченной осталась только последняя в комбинации со своей обратной функцией:

$$y = \arcsin(\sin x)$$
$$y = \arccos(\cos x)$$
$$y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$$
$$y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$$

Построение такого графика можно предложить в качестве варианта для самостоятельного решения.