

Построить график функции:

$$y = \arccos(\cos x)$$

**Решение**

Найдём сначала область определения  $y(x) = \arccos(\cos x)$ . Косинус числа  $\cos x$  имеет смысл при любом действительном  $x$ . Областью значений аргумента арккосинуса, при которых он также определён, является отрезок  $[-1; 1]$ , что полностью совпадает с областью значений функции косинуса. Отсюда следует, что заданная в условии задачи функция  $y(x)$  определена при любом действительном  $x$ .

Функция косинуса является чётной. Отсюда

$$\arccos(\cos(-x)) = \arccos(\cos x)$$

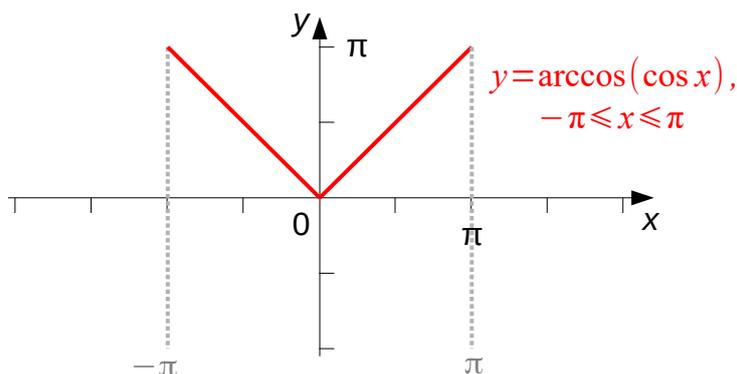
Таким образом  $y(x) = \arccos(\cos x)$  также является чётной ( $y(-x) = y(x)$ ) и её график симметричен относительно оси ординат.

Функция косинуса – периодическая, её период  $T$  составляет  $2\pi$ , следовательно верно равенство

$$\arccos(\cos(x+2\pi n)) = \arccos(\cos x), \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

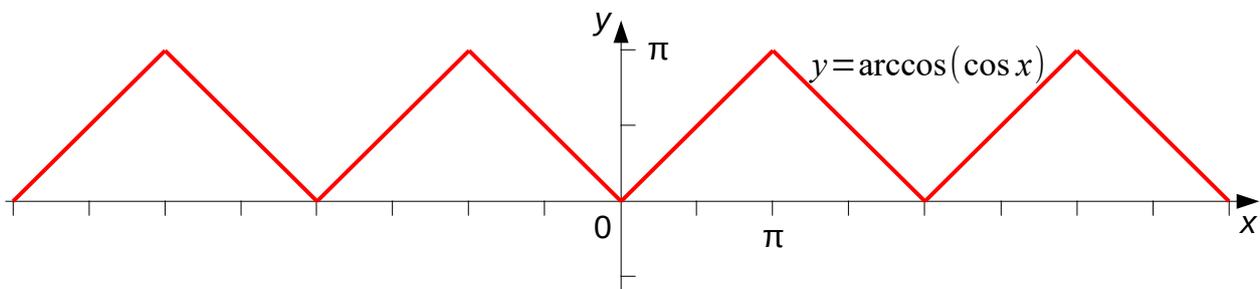
то есть  $y(x)$  является периодической функцией с  $T = 2\pi$  ( $y(x+2\pi n) = y(x)$ ). Это означает, что для построения её графика достаточно построить его на отрезке значений аргумента длиной  $T$ , а затем кратно периоду параллельно перенести вправо и влево вдоль оси абсцисс. С учётом чётности  $y(x)$  удобно выбрать отрезок  $x \in [-\pi; \pi]$ .

Рассмотрим отдельно такой отрезок значений аргумента  $y(x)$ :  $x \in [0; \pi]$ . Арккосинус по определению – число от 0 до  $\pi$ , косинус которого равен заданной величине. В  $y(x)$  аргументом арккосинуса является  $\cos x$ , а с учётом того, что арккосинус – функция обратная косинусу, это означает, что на рассматриваемом отрезке выражение  $\arccos(\cos x)$  возвращает значение самого  $x$ . Иными словами при  $x \in [0; \pi]$  имеем, что  $\arccos(\cos x) = x$ , то есть график  $y(x)$  полностью совпадает с графиком линейной функции  $y = x$ . С учётом чётности это позволяет изобразить график  $y(x)$  при  $x \in [-\pi; \pi]$ :



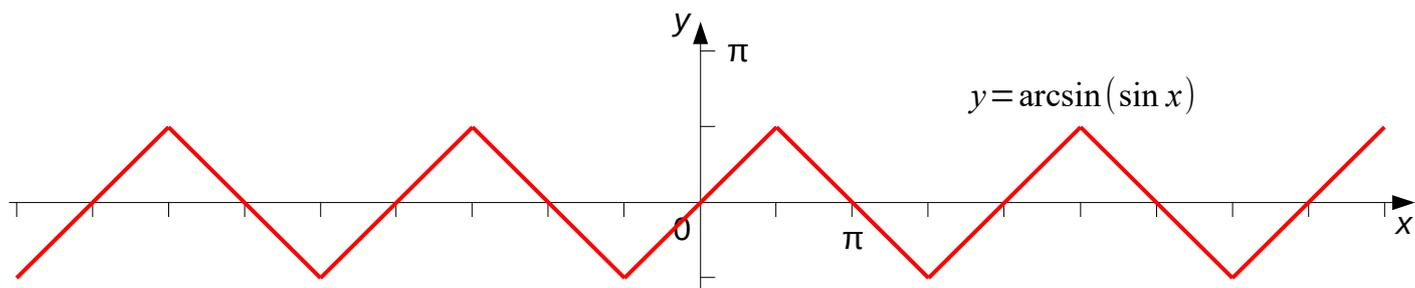
Теперь остаётся принять во внимание периодичность  $y(x)$  и сделать вывод, что график функции  $y = \arccos(\cos x)$  представляет собой бесконечную ломаную линию.

О т в е т



Комментарий

Если сравнить ответ в разобранной задаче с ответом к упражнению А-31:



несложно сделать заключение об одинаковости линий графиков функций  $y = \arcsin(\sin x)$  и  $y = \arccos(\cos x)$ , более того – довольно просто преобразовать одну из них так, чтобы их графики совпали. Для этого достаточно сместить соответствующую  $y = \arccos(\cos x)$  линию на  $\frac{\pi}{2}$  влево

по оси абсцисс и сдвинуть на  $\frac{\pi}{2}$  вниз по оси ординат, чтобы получить заодно наглядную демонстрацию следующего равенства:

$$\arcsin(\sin x) = \arccos\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2},$$

которое является модификацией известного соотношения

$$\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}$$

если положить  $t = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

© Широков Александр, 29.06.2024