

Построить график функции:

$$y = \arccos(\cos x)$$

Решение

Найдём сначала область определения $y(x) = \arccos(\cos x)$. Косинус числа $\cos x$ имеет смысл при любом действительном x . Областью значений аргумента арккосинуса, при которых он также определён, является отрезок $[-1; 1]$, что полностью совпадает с областью значений функции косинуса. Отсюда следует, что заданная в условии задачи функция $y(x)$ определена при любом действительном x .

Функция косинуса является чётной. Отсюда

$$\arccos(\cos(-x)) = \arccos(\cos x)$$

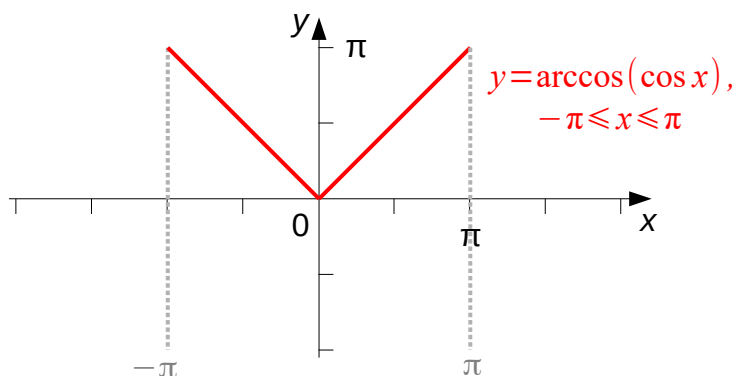
Таким образом $y(x) = \arccos(\cos x)$ также является чётной ($y(-x) = y(x)$) и её график симметричен относительно оси ординат.

Функция косинуса – периодическая, её период T составляет 2π , следовательно верно равенство

$$\arccos(\cos(x+2\pi n)) = \arccos(\cos x), \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

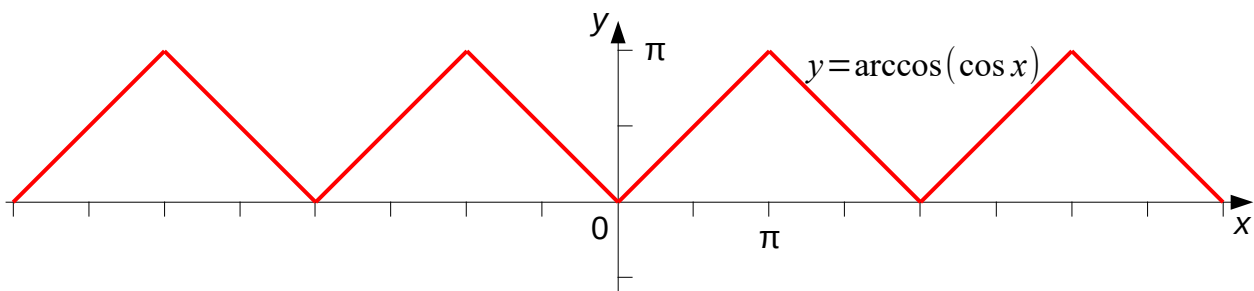
то есть $y(x)$ является периодической функцией с $T = 2\pi$ ($y(x+2\pi n) = y(x)$). Это означает, что для построения её графика достаточно построить его на отрезке значений аргумента длиной T , а затем кратно периоду параллельно перенести вправо и влево вдоль оси абсцисс. С учётом чётности $y(x)$ удобно выбрать отрезок $x \in [-\pi; \pi]$.

Рассмотрим отдельно такой отрезок значений аргумента $y(x)$: $x \in [0; \pi]$. Арккосинус по определению – число от 0 до π , косинус которого равен заданной величине. В $y(x)$ аргументом арккосинуса является $\cos x$, а с учётом того, что арккосинус – функция обратная косинусу, это означает, что на рассматриваемом отрезке выражение $\arccos(\cos x)$ возвращает значение самого x . Иными словами при $x \in [0; \pi]$ имеем, что $\arccos(\cos x) = x$, то есть график $y(x)$ полностью совпадает с графиком линейной функции $y = x$. С учётом чётности это позволяет изобразить график $y(x)$ при $x \in [-\pi; \pi]$:



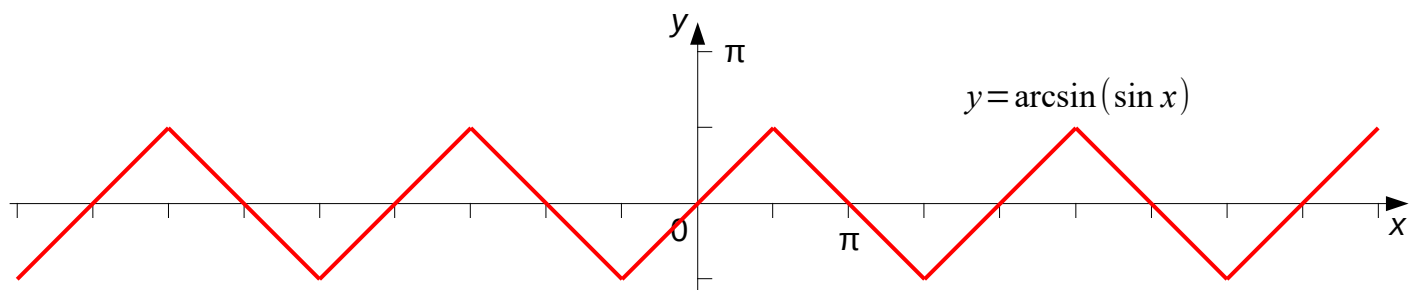
Теперь остаётся принять во внимание периодичность $y(x)$ и сделать вывод, что график функции $y = \arccos(\cos x)$ представляет собой бесконечную ломаную линию.

О т в е т



Комментарий

Если сравнить ответ в разобранной задаче с ответом к упражнению А-31:



несложно сделать заключение об одинаковости линий графиков функций $y = \arcsin(\sin x)$ и $y = \arccos(\cos x)$, более того – довольно просто преобразовать одну из них так, чтобы их графики совпали. Для этого достаточно сместить соответствующую $y = \arccos(\cos x)$ линию на $\frac{\pi}{2}$ влево

по оси абсцисс и сдвинуть на $\frac{\pi}{2}$ вниз по оси ординат, чтобы получить заодно наглядную демонстрацию следующего равенства:

$$\arcsin(\sin x) = \arccos\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2},$$

которое является модификацией известного соотношения

$$\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}$$

если положить $t = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

© Широков Александр, 29.06.2024