Построить график функции:

$$y = \arcsin(\sin x)$$

Решение

Найдём сначала область определения $y(x) = \arcsin(\sin x)$. Синус числа $\sin x$ определён при любом действительном x. Областью значений аргумента арксинуса, при которых он также определён, является отрезок $[-1; 1]$, что полностью совпадает с областью значений функции синуса. Отсюда следует, что заданная в условии задачи функция $y(x)$ определена при любом действительном x.

Функция синуса – периодическая, её период T составляет 2π, следовательно верно равенство

$$\arcsin(\sin(x+2\pi n)) = \arcsin(\sin x), \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

то есть

$$y(x+2\pi n) = y(x)$$

Таким образом, $y(x)$ также является периодической ($T = 2\pi$). Это означает, что для построения её графика достаточно построить его на отрезке значений аргумента длиной 2π, а затем полученный график кратно периоду параллельно перенести вправо и влево вдоль оси абсцисс. В нашем случае удобно выбрать отрезок $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Функции синуса и арксинуса являются нечётными. Отсюда

$$\arcsin(\sin(-x)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x)$$

Таким образом

$$y(-x) = -y(x),$$

то есть $y(x) = \arcsin(\sin x)$ является нечётной и её график симметричен относительно начала координат.

Рассмотрим отдельно такой отрезок значений аргумента $y(x)$: $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Арксинус по определению – число от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен заданной величине. В $y(x)$ аргументом арксинуса является $\sin x$, а с учётом того, что арксинус – функция обратная синусу, это означает, что на рассматриваемом отрезке $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ выражение $\arcsin(\sin x)$ возвращает значение самого x. Иными словами при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ имеем, что $\arcsin(\sin x) = x$. , то есть график $y(x)$ полностью совпадает с графиком линейной функции $y_1 = x$. С учётом нечётности это позволяет изобразить график $y(x)$ на отрезке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 1).

Рассмотрим теперь вспомогательную функцию вида

$$y_2 = -\arcsin(\sin(x - \pi))$$

Несмотря на то, что мы пока знаем только, как выглядит фрагмент графика $y(x)$, на основании этого возможно построить фрагмент графика y_2 . Для этого каждую точку фрагмента графика $y(x)$ нужно сместить вправо на π единиц (при этом получится фрагмент графика $\arcsin(\sin(x - \pi))$), а затем «перевернуть», поменяв знаки ординат точек на противоположные (рис. 2).

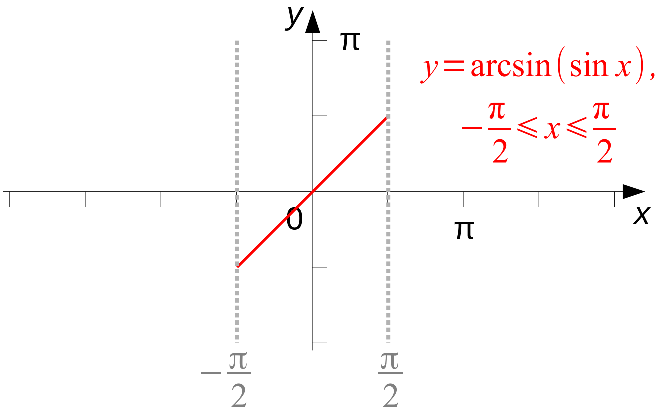

Рис. 1.

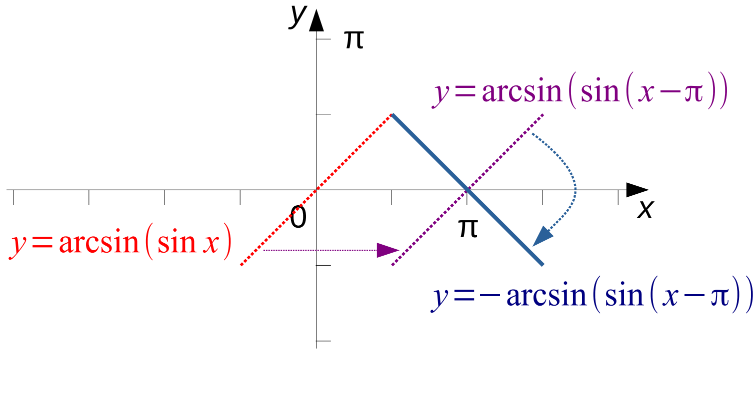

Рис .2.

При выполнении указанных построений мы получили фрагмент графика y_2 на отрезке значений аргумента $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. В соответствии с формулой приведения

$$\sin(x - \pi) = -\sin x$$

имеем:

$$y_2 = -\arcsin(\sin(x - \pi)) = -\arcsin(-\sin x) = -(-\arcsin(\sin x)) = \arcsin(\sin x) = y(x)$$

Таким образом из равенства $y_2 = y(x)$ следует, что мы построили фрагмент графика функции $y(x)$ на отрезке $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Объединяя его с другим фрагментом (рис. 1) получаем график $y(x)$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (рис. 3).

Остаётся принять во внимание периодичность $y(x)$ и сделать вывод, что график функции $y = \arcsin(\sin x)$ представляет собой бесконечную ломанную линию.

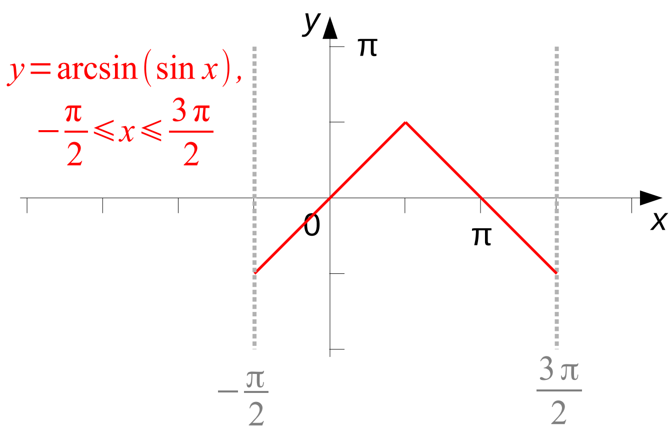

Рис. 3.

Ответ