Школьные задачи / Алгебра / А-30

Целая часть числа x обозначается как $[x]$. Под ней понимается наибольшее целое число, не превышающее заданное. Функция $y = [x]$ определена на всём множестве действительных чисел. С учётом этих данных построить график уравнения:

$$[y] = [x]$$

Р е ш е н и е

Построим сначала график функции

$$y = [x]$$

Рассмотрим x на полуинтервале значений $[n;\ n+1)$, где n – целое. В соответствии с определением целой части числа на указанном числовом промежутке выражение функции преобразуется к виду:

$$y = n$$

Иными словами при $x \in [n;\ n+1)$ график $y = [x]$ представляет собой параллельный оси абсцисс отрезок единичной длины с «выколотой» на конце точкой. Обобщая приведённые рассуждения для произвольного целого значения n. приходим к выводу, что на всей области определения функции её график является бесконечной «ступенчатой» чередой линейных фрагментов (рис. 1).

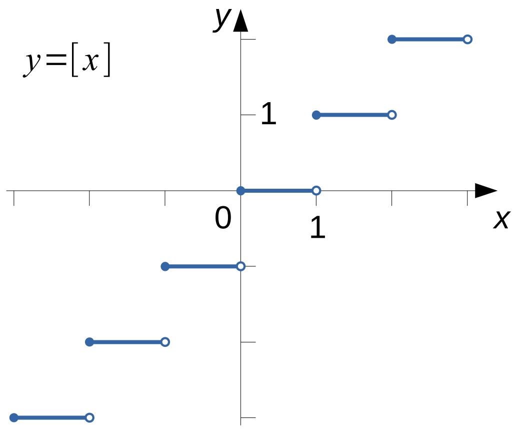


Рис. 1.

Вернёмся теперь к выражению $[y] = [x]$. Пусть снова $x \in [n;\ n+1)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Тогда исходное уравнение преобразуется к виду

$$[y] = n$$

Такое уравнение имеет следующее решение:

$$y \in [n;\ n+1)$$

На плоскости (рис. 2) множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $x \in [n;\ n+1)$ представляет область в виде вертикально направленной полосы. Аналогично, точки, соответствующие условию $y \in [n;\ n+1)$, образуют область в виде горизонтальной полосы. Пересечение указанных областей (имеющее квадратную форму) соответствует точкам, координаты которых удовлетворяют уравнению $[y] = [x]$ при конкретном значении n. Таким образом в случае произвольного целого n получается, что график $[y] = [x]$ является «двухмерной» версией графика функции $y = [x]$ и представляет собой бесконечную «восходящую» череду квадратных областей.

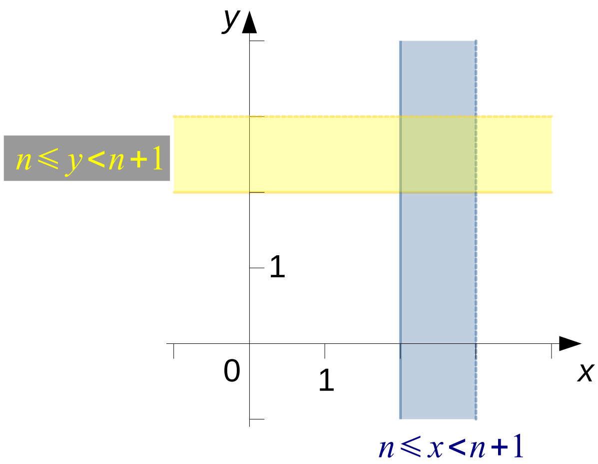
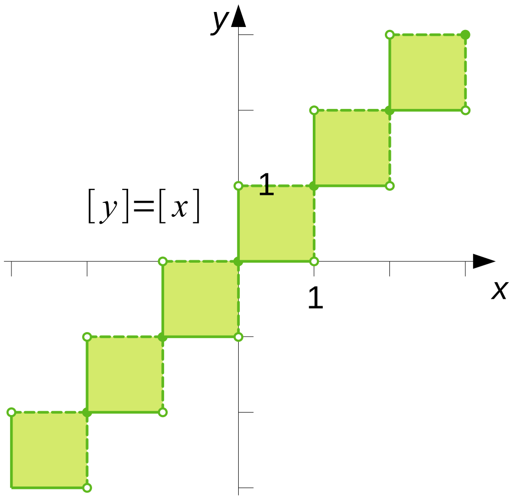


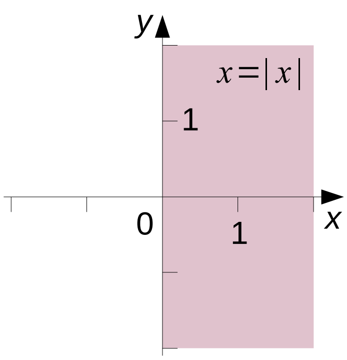
Рис. 2.

Ответ



Комментарий

Тема функции целой части числа (её ещё называют «антье») разбирается не во всех школьных учебниках, поэтому формулировка предложенной задачи выбрана такой, чтобы даже ученику, не сталкивавшемуся с обозначением $[x]$, было по силам её решить (см. также комментарий к задаче А-17).



Нетипичной чертой выражения $[y] = [x]$ является то, что оно на плоскости определяет не линию (совокупность линий), как это более характерно для графиков уравнений, а сплошные области, что обычно встречается у графиков неравенств (например $x^2 + y^2 < 1$ – внутренняя часть круга единичного радиуса и с центром в начале координат). Нельзя сказать, что подобная ситуация уникальна – довольно легко подобрать равенство, график которого обладает данной особенностью. Так, множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$x = |x|$$

есть правая координатная полуплоскость (первый и четвёртый квадранты), где значения абсцисс любых точек неотрицательны.