Школьные задачи / Алгебра / А-29

Построить график уравнения:

$$\{y\} = \{x\}$$

(дробную часть числа x принято обозначать в фигурных скобках: $\{x\}$; функция $y = \{x\}$ определена на всём множестве действительных чисел, область её значений – полуинтервал $[0;\ 1)$, она является периодической функцией с периодом, равным 1).

Р е ш е н и е

Рассмотрим исходное уравнение, ограничив значения переменной y некоторым числовым промежутком. Сначала удобно взять полуинтервал $[0;\ 1)$. Из смысла понятия дробной части числа следует, что на указанном множестве значений выполняется равенство

$$\{y\} = y$$

Иным словами на выбранном полуинтервале значений y исходное уравнение преобразуется к виду

$$y = \{x\}$$

Построение графика этой функции разобрано в решении задачи А-17 (рис. 1).

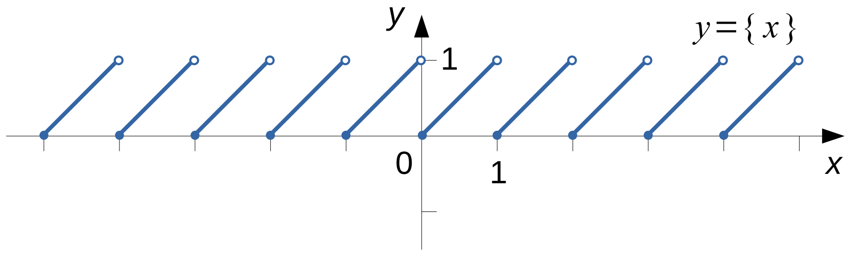


Рис. 1.

Теперь рассмотрим для значений y какой-нибудь другой полуинтервал $[n;\ n + 1)$, где n – некоторое целое число. На графике функции $y = \{x\}$ выберем произвольную точку с координатами $(x_0;\ y_0)$. Для этой точки выражение

$$\{y_0\}=\{x_0\}$$

есть верное числовое равенство. Из периодичности функции дробной части числа следует, что если n – целое, то

$$\{y_0\}=\{y_0 + n\}$$

Это в свою очередь означает, что выражение

$$\{y_0 + n\}=\{x_0\}$$

также является верным числовым равенством, поэтому точка с координатами $(x_0;\ y_0 + n)$ тоже будет удовлетворять уравнению

$$\{y\}=\{x\}.$$

Точка $(x_0;\ y_0 + n)$ смещена по оси ординат на n единиц относительно $(x_0;\ y_0)$ (рис. 2). Таким образом получается, что в области значений $y \in [n;\ n + 1)$ для любого значения x всегда найдётся «дублирующая» точка, то есть точка, смещённая по ординате на n единиц относительно графика функции $y=\{x\}$.

Очевидно, что, во-первых, вся совокупность таких точек-«дубликатов» образует ничто иное как график функции

$$y=\{x\} + n,$$

а, во-вторых, координаты его точек также будут удовлетворять условию $\{y\}=\{x\}$ (рис. 3).

Приведённые рассуждения позволяют утверждать, что исходное уравнение равносильно серии уравнений

$$y=\{x\} + n,\ \text{где}\ n \in \mathbb{Z},$$

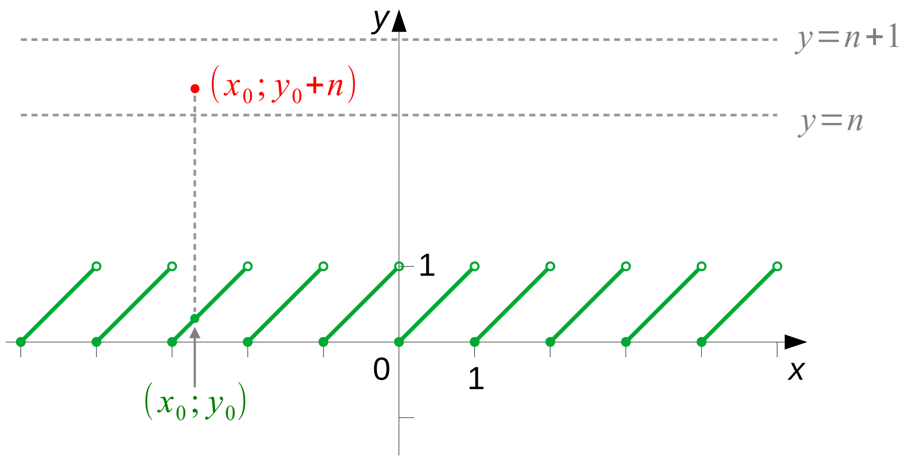


Рис. 2.

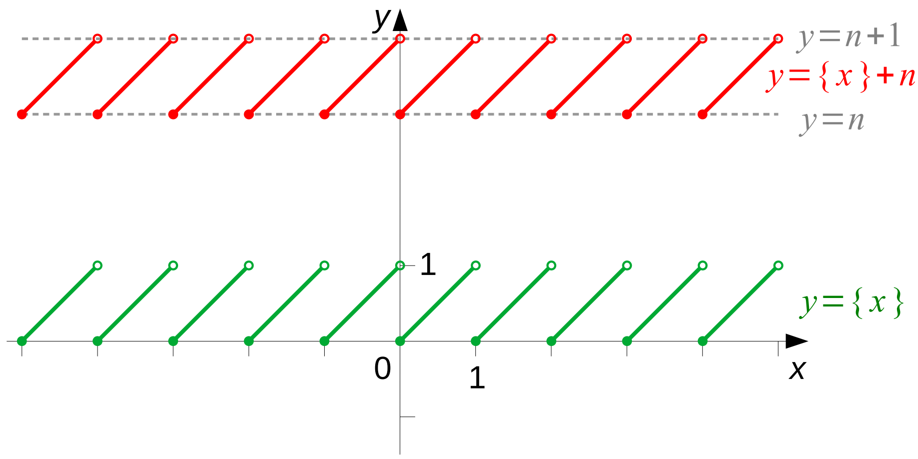


Рис. 3.

то есть графиком уравнения $\{y\}=\{x\}$ является бесконечная череда графиков функции

$$y=\{x\} + n$$

Действительно, если найти дробную часть такого выражения, то получится:

$$\{y\} = \{\{x\} + n\} = \{\{x\}\} = \{x\}$$

Примечательно (рис. 4), что хотя график каждой отдельно взятой функции $y=\{x\} + n$ представляет совокупность полуотрезков, наклоненных под углом 45° по отношению к положительному направлению оси абсцисс, «концевые» точки графика функции $y = \{x\} + n + 1$ точно попадают на «проколы» $y=\{x\} + n$, благодаря чему полуотрезки «сшиваются» воедино и образуют на плоскости семейство прямых линий, которое можно описать ещё и вот таким выражением: $y = x + n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

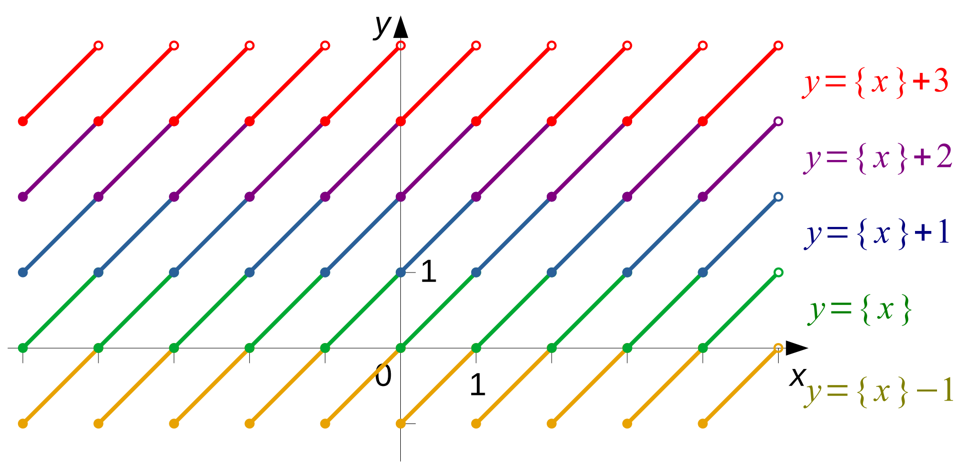
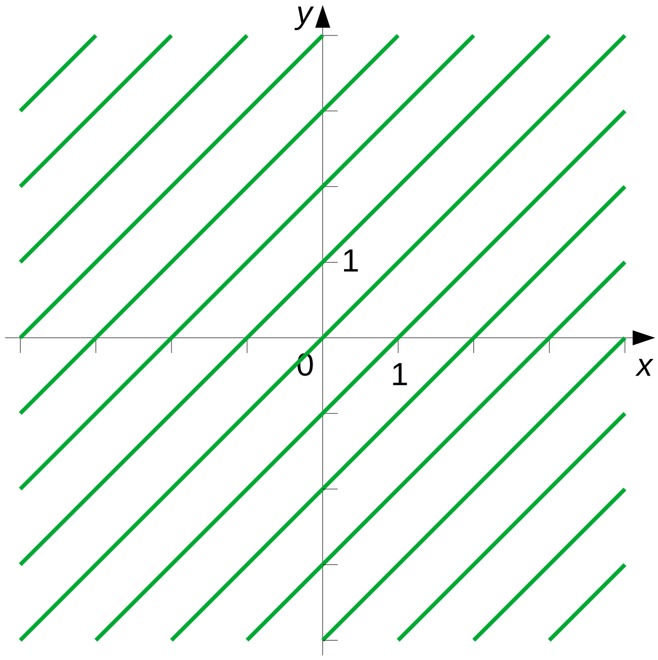


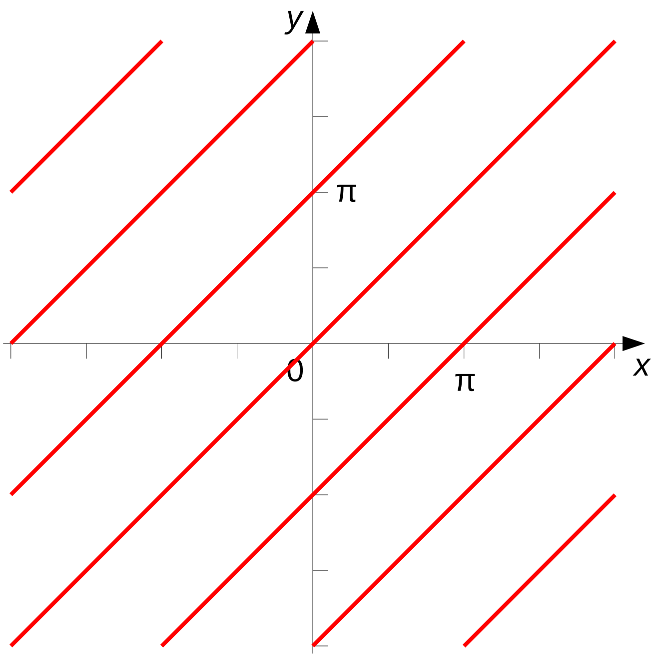
Рис. 4.

О т в е т



$\{y\} = \{x\}$

К о м м е н т а р и й



$\sin(y - x) = 0$

В разборе задачи А-26 фигурирует уравнение, графиком которого на координатной плоскости является серия прямых линий, наклонённых под углом 45° по отношению к положительному направлению оси абсцисс, и смещённых друг относительно друга по оси ординат на π:

$$\sin(y - x) = 0$$

«Плотность» расположения прямых линий можно увеличить, если модифицировать это уравнение так:

$$\sin(\pi y - \pi x) = 0$$

На самом деле:

$$\sin(\pi y - \pi x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\pi y - \pi x = \pi k \quad \Leftrightarrow$$
$$y - x = k \quad \Leftrightarrow$$
$$y = x + k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Выходит, что уравнения $\sin(\pi y - \pi x) = 0$ и $\{y\} = \{x\}$ имеют одинаковые графики, то есть множество решений одного полностью совпадает с множеством решений другого, на основании чего между ними допустимо поставить знак равносильности:

$$\{y\} - \{x\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\pi y - \pi x) = 0$$