Школьные задачи / Алгебра / А-28

Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} \{x\} \geqslant \{x\}^2 + y^2 \\ \{y\} \geqslant \{y\}^2 + x^2 \end{cases}$$

(дробную часть числа x принято обозначать в фигурных скобках: $\{x\}$; функция $y = \{x\}$ определена на всём множестве действительных чисел, область её значений – полуинтервал $[0; 1)$, она является периодической функцией с периодом, равным 1).

Решение

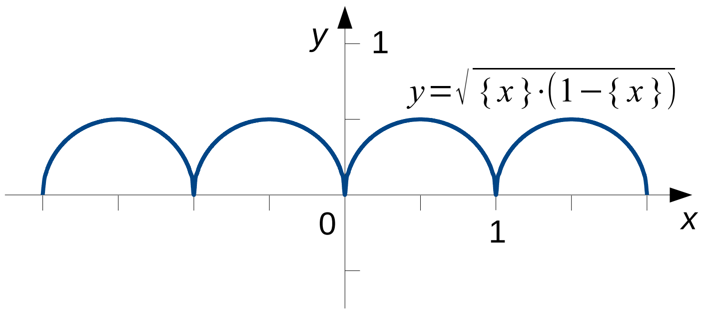
Рассмотрим сначала первое неравенство в системе и преобразуем его:

$$\{x\} \geqslant \{x\}^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 \leqslant \{x\} - \{x\}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y^2} \leqslant \sqrt{\{x\} - \{x\}^2} \quad \Leftrightarrow \quad |y| \leqslant \sqrt{\{x\} \cdot (1 - \{x\})}$$

(в задаче А-22 было показано, что неравенство $\{x\} \cdot (1 - \{x\}) \geq 0$ выполняется при любом действительном x). Построение графика функции

$$y = \sqrt{\{x\} \cdot (1 - \{x\})}$$

также было рассмотрено при решении задачи А-22:



С учётом правила, сформулированного в комментарии к задаче А-27, множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $|y| \leqslant \sqrt{\{x\} \cdot (1 - \{x\})}$ (или равносильному ему неравенству $\{x\} \geq \{x\}^2 + y^2$) выглядит как бесконечная череда круглых областей, «нанизанных» на ось абсцисс и касающихся друг друга (рис. 1).

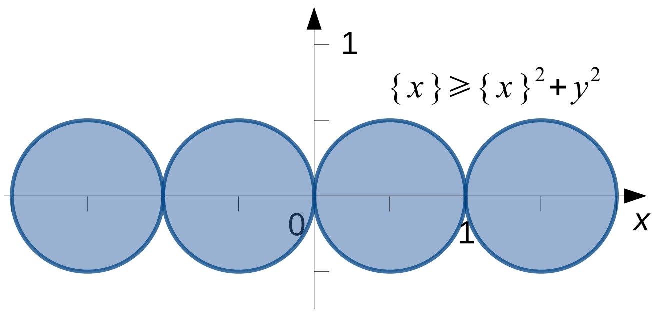


Рис. 1.

Легко видеть, что второе неравенство системы

$$\{y\} \geq \{y\}^2 + x^2$$

аналогично первому с той лишь разницей, что переменные x и y переставлены местами. Это позволяет легко изобразить соответствующее множество точек (рис. 2).

Решением задачи будет область пересечения двух множеств, образующих на координатной плоскости четырёхлепестковую фигуру (рис. 3).

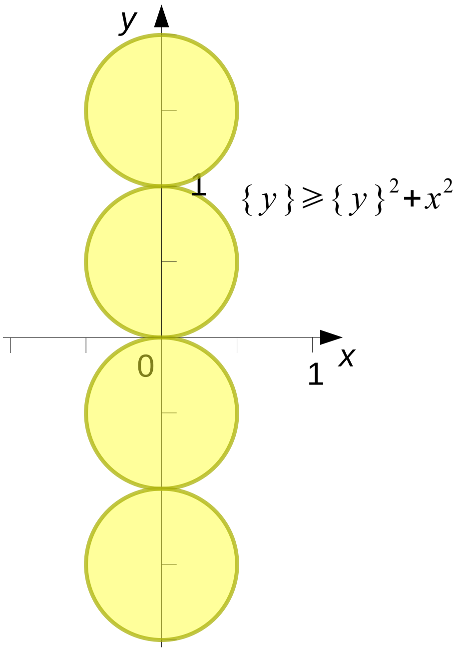


Рис. 2.

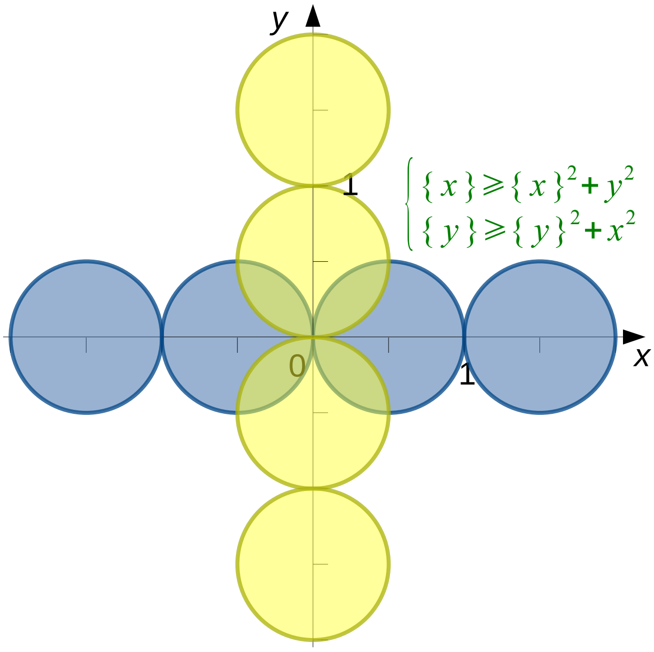
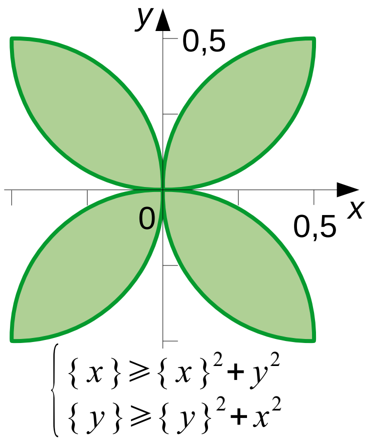


Рис. 3.

Ответ

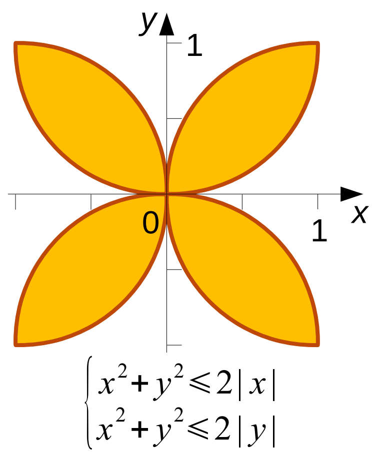


Комментарий

На заднем форзаце задачника по алгебре[*] мне когда-то попалось изображение графика уравнения $x^2 + y^2 = 2|x|$, отталкиваясь от которого я подобрал другое:

$$x^2 + y^2 = |2x| + |2y| - 1 ,$$

ставшее позже упражнением А-1[**]. В связи с этим можно предложить другой набор условий, описывающих фигуру, подобную той, что получена при решении разобранной выше задачи (см. рисунок).



© Широков Александр, 15.05.2024

* Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1994. – 271 с.

** См. заметку «Школьные задачи» в разделе «Соображалки» (URL: https://shurichimik.narod.ru/consideration/05school-tasks/05school-tasks.htm).