Школьные задачи / Алгебра / А-27

Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых соответствуют требованию:

$$|y| \le \sin^2 x + 1$$

Р е ш е н и е

Для решения задачи построим сначала график функции

$$y = \sin^2 x + 1$$

Проведём с её выражением следующие преобразования:

$$y=\sin^2 x+1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$

Построение графика $y=-\frac{1}{2}\cos 2x$ было рассмотрено ранее при разборе решения задачи А-25. Если его «поднять» на полторы единицы вверх, то как раз получится график $y = \sin^2 x + 1$ (рис. 1).

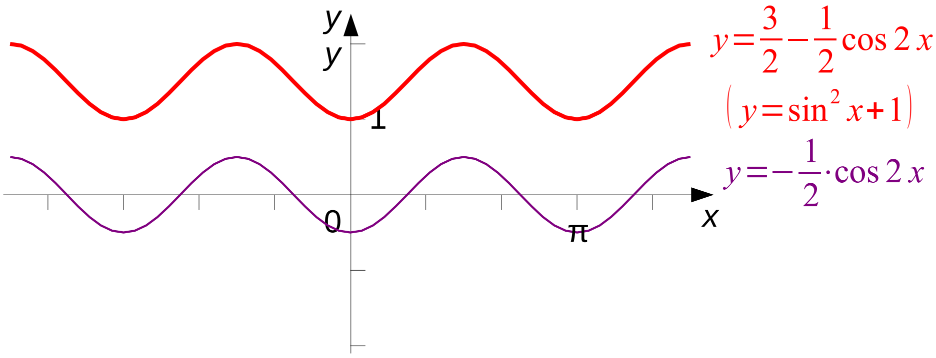


Рис. 1.

Рассмотрим два варианта: когда $y \ge 0$ и когда $y < 0$.

1) $y \ge 0$

Тогда $|y| = y$ и исходное неравенство запишется в виде

$$y\leqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$

Данному неравенству удовлетворяет область, содержащая все точки, расположенные не выше графика функции $y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, а с учётом требования $y \ge 0$ это будут точки только первого и второго квадрантов, лежащие не ниже оси абсцисс. Иными словами, это будут точки, координаты которых удовлетворяют системе неравенств (рис. 2):

$$\begin{cases} y\geqslant 0 \\ y\leqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$$

2) $y < 0$

В этом случае $|y| = -\ y$ и

$$-y\leqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x \quad \text{или} \quad y\geqslant-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$$

Последнему неравенству удовлетворяют все точки, расположенные не ниже графика функции $y=-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$ (или равнозначной ей $y = -(\sin^2 x + 1)$), который представляет собой зеркально отражённый «вниз» относительно оси абсцисс график $y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$. При этом (из-за того, что требование $y < 0$ является строгим неравенством) сами точки будут находиться под осью абсцисс (рис. 3).

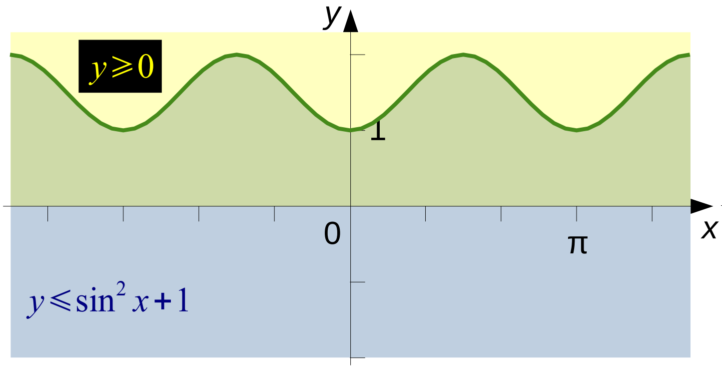


Рис. 2.

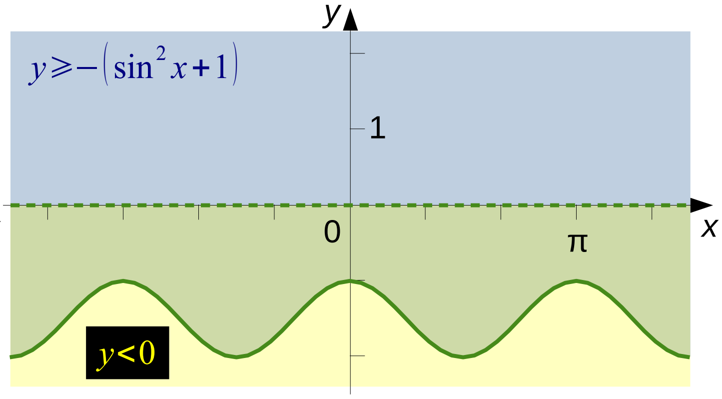
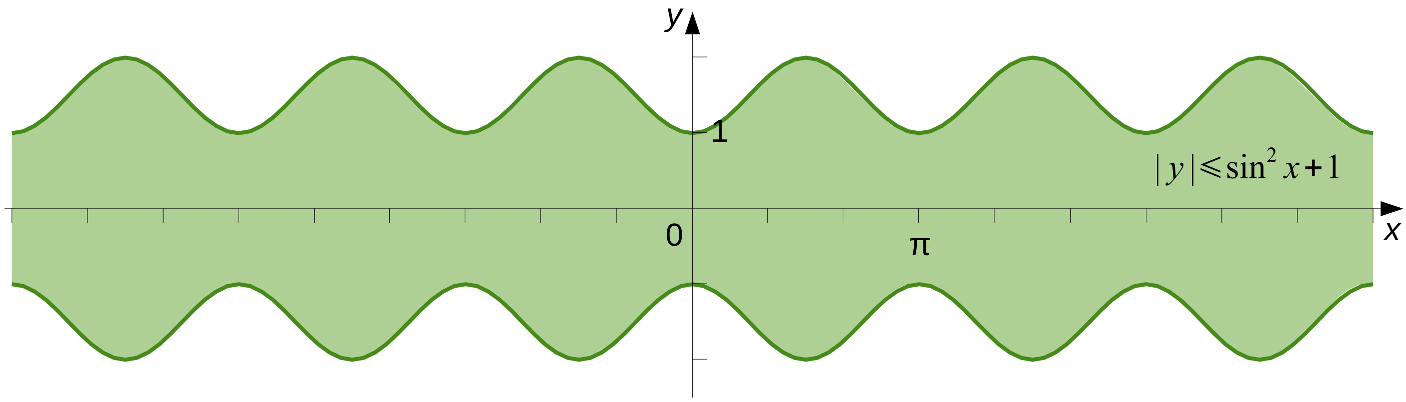


Рис. 3.

Ответом в задаче будет объединение двух получившихся областей – искомым множеством является бесконечная фигура, внешне напоминающая профиль известной сладости «чурчхела».

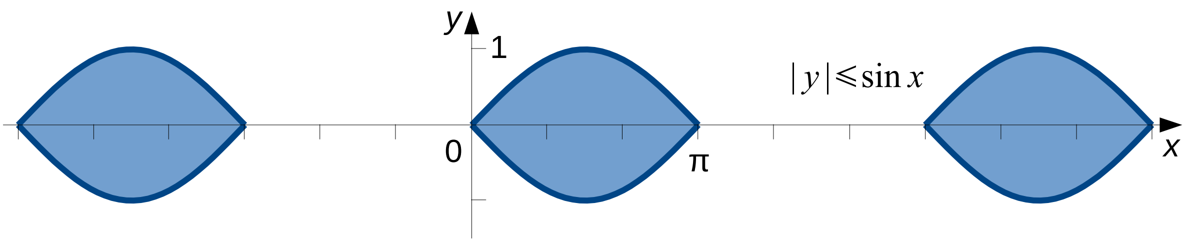
Ответ



Комментарий

Отталкиваясь от результата рассмотренной выше задачи, можно сформулировать общее правило для решения подобных упражнений: множество точек, координаты которых соответствуют условию $|y| \le f(x)$, представляет собой фигуру, заключённую между линиями графика уравнения $|y| = f(x)$ (алгоритм построения такого графика был рассмотрен в комментарии к задаче А-25).

С учётом этого правила можно предложить целый ряд усложнённых версий задач А-11, А-16, А-17, А-18, А-19, А-20, А-21 и А-22. Например, решение модифицированного упражнения А-11 (изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют требованию $|y| \le \sin x$) будет выглядеть так:



Для остальных усложнённых вариантов указанных задач условия выражаются следующими неравенствами:

А-16: $|y|\leqslant|x|$

А-17: $|y|\leqslant\left|\{x\}-\frac{1}{2}\right|$

А-18: $|y|\leqslant\left|\{x\}^2-\frac{1}{2}\right|$

А-19: $|y|\leqslant\left|\sqrt{\{x\}}-\frac{1}{2}\right|$

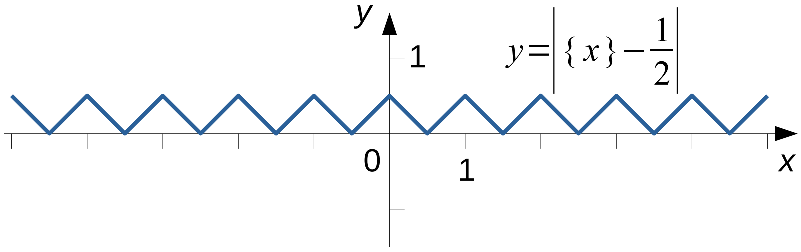
А-20: $|y|\leqslant\left|e^{\{x\}}-\frac{(e+1)}{2}\right|$

А-21: $|y|\leqslant\left|\sqrt{1-\{x\}^2}-\frac{1}{2}\right|$

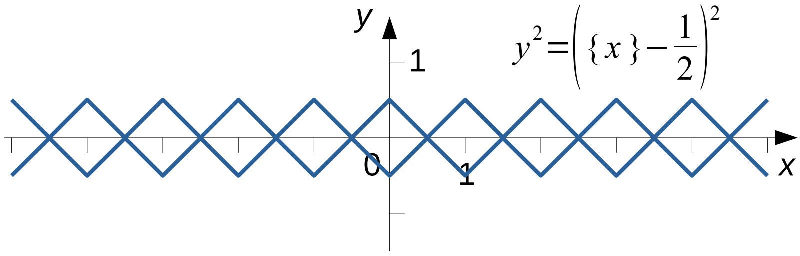
А-22: $|y|\leqslant\sqrt{\{x\}\cdot(1-\{x\})}$

В случае каждой из перечисленных здесь задач, где фигурирует дробная часть числа $\{x\}$, и с учётом комментария к заданию А-25 получается своя мини-серия, представляющая ряд последовательно усложняющихся упражнений. Так, например, в случае А-17 это такая группа:

а) построить график функции: $y=\left|\{x\}-\frac{1}{2}\right|$



б) построить график уравнения: $|y|=\left|\{x\}-\frac{1}{2}\right|$ (или равносильного ему $y^2=\left(\{x\}-\frac{1}{2}\right)^2$, разбор решения опубликован отдельно в виде задачи А-24)



в) изобразить на плоскости множество точек, координаты которых соответствуют требованию: $|y|\leqslant\left|\{x\}-\frac{1}{2}\right|$