

Школьные задачи / Алгебра / А-26

Построить график уравнения:

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x$$

Решение

Помня, что функция тангенса определена не для всех действительных чисел, преобразуем исходное уравнение:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x &\Leftrightarrow \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin y}{\cos y} - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin y \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos y}{\cos x \cdot \cos y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(y-x)}{\cos x \cdot \cos y} = 0 \end{aligned}$$

(при последнем переходе применено тождество для синуса разности двух аргументов). Полученная дробь может быть равна нулю, когда $\sin(y-x) = 0$, при этом $\cos x \neq 0$ и $\cos y \neq 0$. Иными словами исходное уравнение равносильно следующей системе, с которой также можно выполнить ряд преобразований:

$$\begin{cases} \sin(y-x) = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Первое выражение в системе описывает серию уравнений:

$$\begin{aligned} &\dots \\ &y = x - 2\pi \\ &y = x - \pi \\ &y = x \\ &y = x + \pi \\ &y = x + 2\pi \\ &\dots \end{aligned}$$

На координатной плоскости графики их представляют собой множество прямых линий, наклонённых под углом 45° по отношению к положительному направлению оси абсцисс, и смещённых друг относительно друга по оси ординат на π (рис. 1).

Второе выражение системы описывает множество значений, которые не может принимать величина x в исходном уравнении ($\cos x \neq 0$). Графически это можно изобразить как бесконечную череду вертикальных линий, расположенных на расстоянии π друг от друга (рис. 2).

Аналогично, третье выражение в системе описывает множество значений, которые не может принимать величина y ($\cos y \neq 0$) и графически это выглядит как серия горизонтальных линий, где расстояние между соседними составляет π (рис. 3).

Для изображения графика заданного в условии уравнения необходимо на графике $\sin(y-x) = 0$ «выколоть» точки его пересечений с линиями, соответствующими требованиям $\cos x \neq 0$ и $\cos y \neq 0$ (рис. 4).

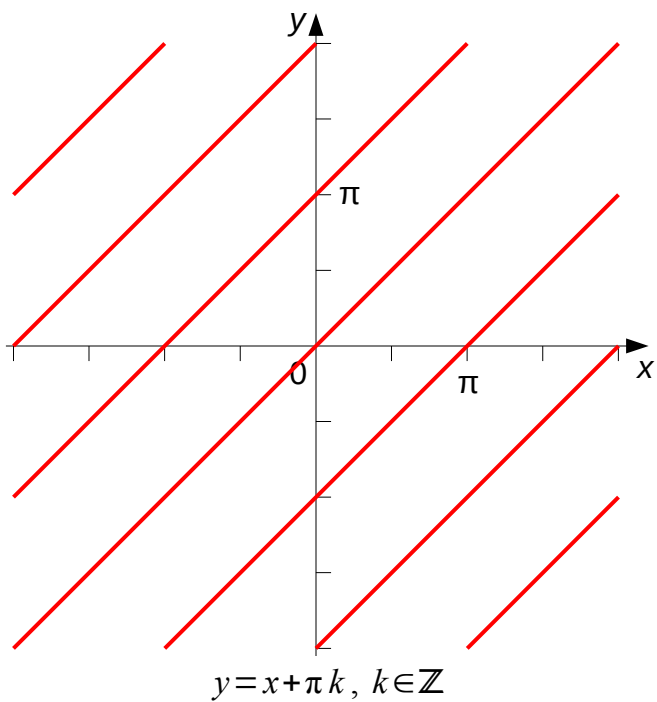


Рис. 1.

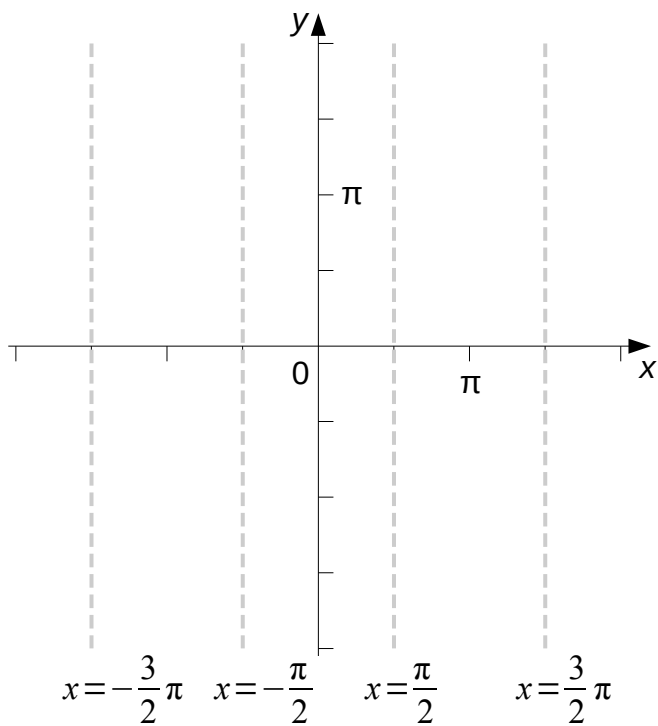


Рис. 2.

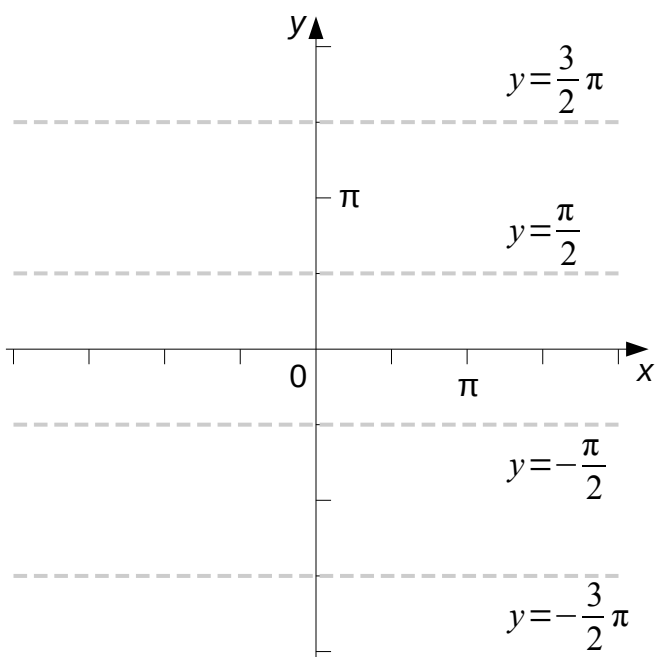


Рис. 3.

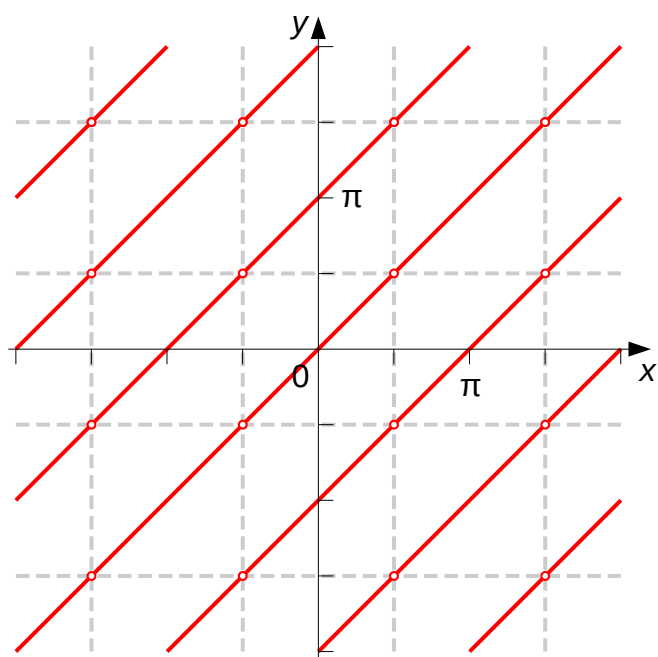
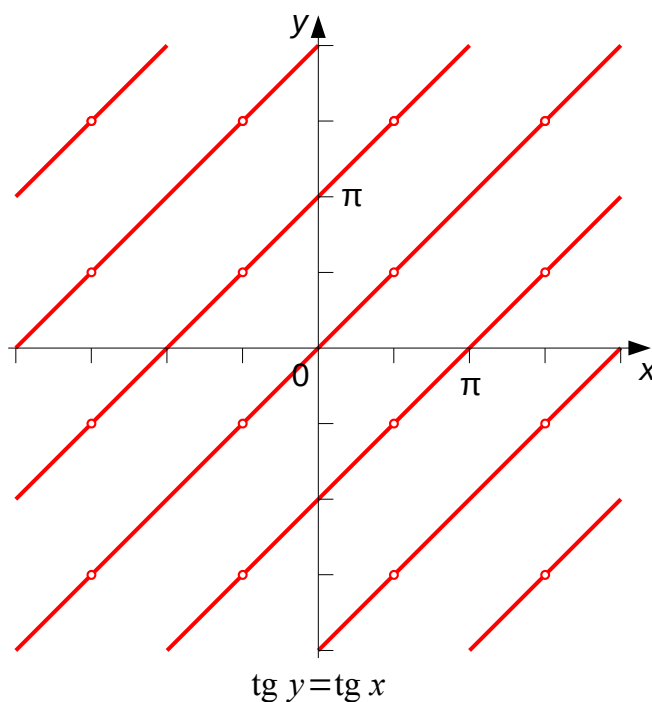


Рис. 4.

О т в е т

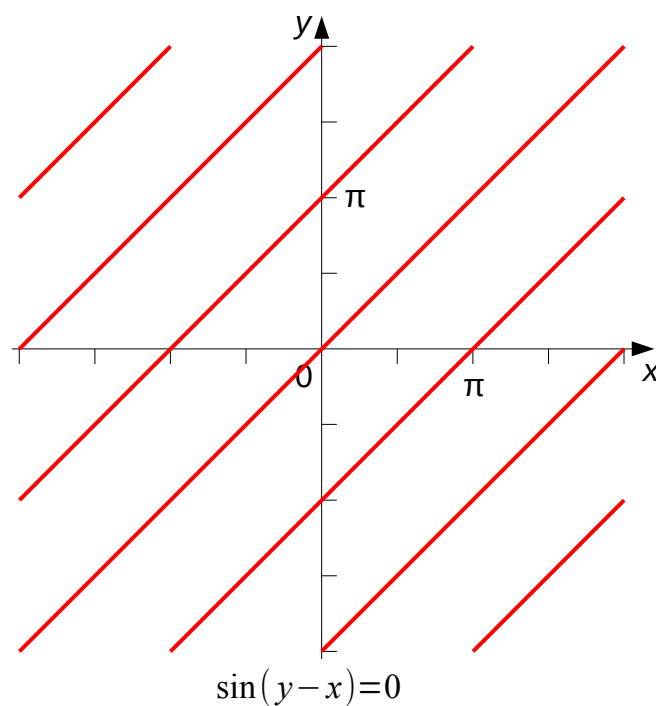


Комментарий

Выше было показано, что по ходу решения выполняется построение графика уравнения

$$\sin(y - x) = 0$$

Этот этап может быть сформулирован для учащихся в виде отдельного более простого задания, предваряющего не только решение разобранный здесь задачи, но и упражнения А-10.



© Широков Александр, 15.05.2024