Школьные задачи / Алгебра / А-15

Найти все корни уравнения: $z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0$

Р е ш е н и е

В многочлене в правой части уравнения каждое последующее слагаемое можно получить из предыдущего умножением на $\frac{2}{z}$. Это позволяет рассмотреть правую часть как сумму первых шести членов геометрической прогрессии, первый член которой равен $b_1 = z^5$, а знаменатель $q = \frac{2}{z}$. Ранее было продемонстрировано*, как благодаря такому подходу многочлен раскладывается на множители. Поскольку в нашем случае z – неизвестная величина, то стоит специально оговорить, что необходимые преобразования при разложении будут справедливы при $z \neq 0$ и $z - 2 \neq 0$ (то есть $z \neq 2$). Такие условия выполняются – подстановка 0 и 2 в исходное уравнение показывает, что эти числа его корнями не являются.

Всё сказанное применительно к данной задаче означает, что исходное уравнение равносильно другому:

$$z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0 \Leftrightarrow (z + 2)\cdot(z^2 + 2z + 4)\cdot(z^2 - 2z + 4) = 0$$

Для его решения остаётся выяснить, при каких значениях z каждый из трёх сомножителей обращается в ноль, иными словами уравнение разбивается на совокупность трёх следующих:

$$\left[\begin{array}{l} z + 2 = 0 \\ z^2 + 2z + 4 = 0 \\ z^2 - 2z + 4 = 0 \end{array}\right.$$

Решим каждое из них по отдельности:

1) $z + 2 = 0$

Отсюда $z_1 = -2$.

2) $z^2 + 2z + 4 = 0$

Дискриминант такого квадратного уравнения $D = 2^2 - 4\cdot1\cdot4 = 4 - 16 = -12 < 0$, следовательно, оно имеет комплексные корни:

$$z_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{D}}{2\cdot1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4\cdot3\cdot(-1)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}\cdot i}{2} = -1 \pm i\cdot\sqrt{3}$$

3) $z^2 - 2z + 4 = 0$

У этого квадратного уравнения дискриминант $D = (-2)^2 - 4\cdot1\cdot4 = 4 - 16 = -12$ тоже отрицателен, значит:

$$z_{4,5} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{D}}{2\cdot1} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}\cdot i}{2} = 1 \pm i\cdot\sqrt{3}$$

В итоге получается, что исходное уравнение имеет один действительный корень и четыре комплексных.

О т в е т

$z_1 = -2$, $z_{2,3,4,5} = \pm1 \pm i\cdot\sqrt{3}$

К о м м е н т а р и й

Для разобранной выше задачи в течение года после опубликования на Дзене читателями было предложено несколько других интересных способов решения.

---

* См. задание А-14.

1) Пользователь «Павел А.» показал, что левая часть уравнения легче раскладывается на множители с использованием иного подхода:

> **Павел А.** 22 д
> Зачем усложнять?
> z⁵ + 2z⁴ + 4z³ + 8z² + 16z + 32 = z³ * (z² + 2z + 4) + 8 * (z² + 2z + 4) = (z³ + 8) * (z² + 2z + 4).
> Далее стандартно.
> Ответить 1
>
> > **Широков Александр** 22 д
> > Павел А., да, хороший способ сгруппировать
> > Ответить

Более подробно это выглядит так. Сначала у первых трёх слагаемых выносится за скобку общий множитель z^3 , а у последних трёх – множитель 8:

$$z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = z^3\cdot(z^2 + 2z + 4) + 8\cdot(z^2 + 2z + 4)\ ,$$

далее квадратный трёхчлен $z^2 + 2z + 4$ тоже выносится за скобку как общий множитель:

$$z^3\cdot(z^2 + 2z + 4) + 8\cdot(z^2 + 2z + 4) = (z^2 + 2z + 4)\cdot(z^3 + 8)$$

После этого остаётся только расписать куб суммы:

$$(z^2 + 2z + 4)\cdot(z^3 + 8) = (z^2 + 2z + 4)\cdot(z + 2)\cdot(z^2 - 2z + 4)\ ,$$

чтобы получить разложение, идентичное рассмотренному в исходном варианте решения.

2) Для многочлена в левой части уравнения возможно несколько способов разложения на множители, определяющих далее ход решения. Пользователь «Ветриница дубравная» предложил(а) свой.

> **Ветриница дубравная** 1 г
> А почему нельзя было просто сгруппировать все нечетные члены и все четные, вынести общий множитель и решать потом как обычное линейное и биквадратное уравнение?
> z(z^4+4z^2+16)+2(z^4+4z^2+16)=0
> (z+2)(z^4+4z^2+16)=0
> Ответы те же, но так проще и быстрей, по-моему.
> Ответить 1
>
> > **Широков Александр** 1 г
> > Ветриница дубравная, согласен, можно пойти и так, только при решении биквадратного уравнения путём замены переменной z²=t получится уравнение t²+4t+16=0 , у которого два комплексных корня. При обратном переходе к переменной z понадобится извлекать квадратные корни из комплексных чисел.
> > Ответить

Рассмотрим его поэтапно. Сгруппируем чётные и нечётные слагаемые в левой части исходного уравнения:

$$z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^5 + 4z^3 + 16z + 2z^4 + 8z^2 + 32 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad z\cdot(z^4 + 4z^2 + 16) + 2\cdot(z^4 + 4z^2 + 16) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z^4 + 4z^2 + 16)\cdot(z + 2) = 0$$

С множителем $(z + 2)$ ситуация понятна (он даёт действительный корень $z = -2$), остаётся разобраться с другим. Для нахождения остальных корней нужно будет решить биквадратное уравнение вида:

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

Используем для этого типовую замену $t = z^2$ и получим:

$$t^2 + 4t + 16 = 0$$

Дискриминант такого уравнения $D = 4^2 - 4\cdot1\cdot16 = -48 < 0$, поэтому у него будут комплексные корни:

$$t_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{D}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm\sqrt{-48}}{2}=\frac{-4\pm4\sqrt{3}\cdot i}{2}=-2\pm i\cdot2\sqrt{3}$$

Возвращаясь к старой переменной получаем, что

$$z^2=-2+i\cdot2\sqrt{3} \text{ или } z^2=-2-i\cdot2\sqrt{3},$$

поэтому далее придётся извлечь квадратные корни из комплексных чисел $-2+i\cdot2\sqrt{3}$ и $-2-i\cdot2\sqrt{3}$.

Начнём с первого $t_1 = -2+i\cdot2\sqrt{3}$.

Найдём модуль этого числа $|t_1| = \sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2} = 4$. Далее находим аргумент φ. В нашем случае он должен быть таким, чтобы $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos\varphi = \frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$. Данному требованию отвечает угол $\frac{2\pi}{3}$ радиан, значит запись t_1 в тригонометрической форме будет

$$-2+i\cdot2\sqrt{3}=4\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

Из формулы Муавра следует, что значения квадратного корня ω из z равны

$$\omega=\sqrt{z}=|z|^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi k\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi k\right)\right),$$

где k принимает значения 0 или 1. В нашем случае $\frac{\varphi}{2}=\frac{\pi}{3}$ и

$$\omega_0=4^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\cdot0\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\cdot0\right)\right) = \sqrt{4}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+i\cdot\sqrt{3}$$

$$\omega_1=4^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\cdot1\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\cdot1\right)\right) = -1-i\cdot\sqrt{3}$$

Таким образом, мы получили значения ещё двух корней исходного уравнения:

$z_2 = 1+i\cdot\sqrt{3}$ и $z_3 = -1-i\cdot\sqrt{3}$

Проделаем тоже самое с $t_2 = -2-i\cdot2\sqrt{3}$:

$$|t_2| = \sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2} = 4;\ \sin\varphi = \frac{-2\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\varphi = \frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Такие величины синуса и косинуса соответствуют $\varphi = \frac{4\pi}{3}$, а $\frac{\varphi}{2}=\frac{2\pi}{3}$, следовательно значения корня будут

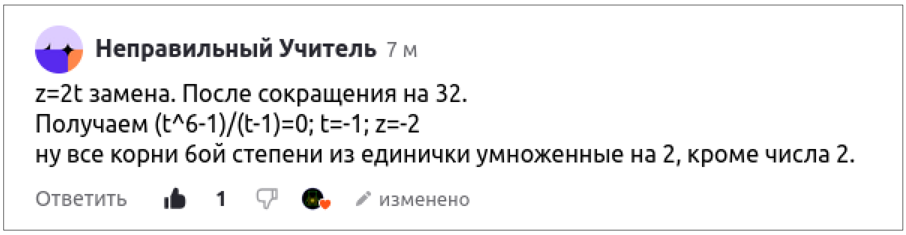
$$\omega_0=4^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\cdot0\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\cdot0\right)\right) = -1+i\cdot\sqrt{3}$$

$$\omega_1=4^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\cdot1\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\cdot1\right)\right) = 1-i\cdot\sqrt{3}$$

В итоге мы получили оставшиеся два значения корней уравнения:

$z_4 = -1+i\cdot\sqrt{3}$ и $z_5 = 1-i\cdot\sqrt{3}$

3) Весьма оригинальный способ описал пользователь с ником «Неправильный учитель»:


Неправильный Учитель 7 м
z=2t замена. После сокращения на 32.
Получаем (t^6-1)/(t-1)=0; t=-1; z=-2
ну все корни 6ой степени из единички умноженные на 2, кроме числа 2.
Ответить 1 изменено

Разберём и этот путь решения. Выполним замену переменной, положив $z = 2t$:

$$(2t)^5 + 2\cdot(2t)^4 + 4\cdot(2t)^3 + 8\cdot(2t)^2 + 16\cdot(2t) + 32 = 0 \;\Leftrightarrow\; 32t^5 + 2\cdot16t^4 + 4\cdot8t^3 + 8\cdot4t^2 + 32t + 32 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 32t^5 + 32t^4 + 32t^3 + 32t^2 + 32t + 32 = 0 \;\Leftrightarrow\; t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 = 0$$

Если принять, что и $t \neq 1$, то становятся допустимы следующие преобразования:

$$t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t \neq 1 \\ \dfrac{(t-1)\cdot(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)}{t-1} = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} t \neq 1 \\ \dfrac{t^6-1}{t-1} = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t \neq 1 \\ t^6 - 1 = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t \neq 1 \\ t^6 = 1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t \neq 1 \\ t = \sqrt[6]{1} \end{cases}$$

Отыщем отдельно значения корня шестой степени из единицы. В соответствии с формулой Муавра такие корни получаются из выражения:

$$\omega = \sqrt[6]{z} = |z|^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{6} + \frac{\pi k}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{6} + \frac{\pi k}{3}\right)\right), \text{ где } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

В нашем случае $|1| = 1$, а $\varphi = 0$, так как 1 – действительное число. Поэтому корни из единицы будут получаться из выражения:

$$t = \sqrt[6]{1} = \cos\frac{\pi k}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi k}{3}, \text{ где } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Находим их:

$$t_0 = \cos\frac{\pi\cdot0}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi\cdot0}{3} = \cos 0 + i\cdot\sin 0 = 1 + i\cdot0 = 1$$
$$t_1 = \cos\frac{\pi\cdot1}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi\cdot1}{3} = \frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$t_2 = \cos\frac{\pi\cdot2}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi\cdot2}{3} = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$t_3 = \cos\frac{\pi\cdot3}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi\cdot3}{3} = -1$$
$$t_4 = \cos\frac{\pi\cdot4}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi\cdot4}{3} = -\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$t_5 = \cos\frac{\pi\cdot5}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi\cdot5}{3} = \frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Из полученных значений следует любопытная вещь, на которую хочется специально обратить внимание. Поскольку (см. выше)

$$t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t \neq 1 \\ t = \sqrt[6]{1} \end{cases}$$

то решения этого уравнения на комплексной плоскости будут изображаться пятью вершинами правильного шестиугольника, вписанного в единичную окружность (вершина, соответствующая $t = 1$, «выколота») (рис. 1).

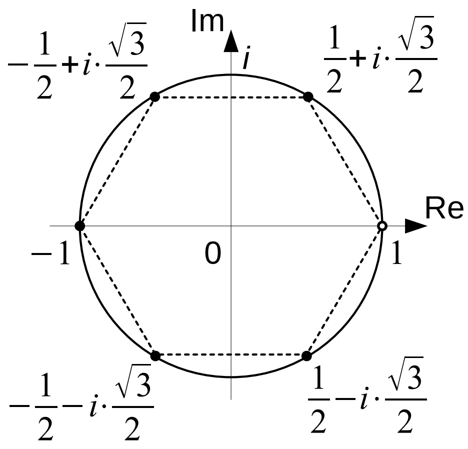


Рис. 1.

Помня, что $z = 2t$, находим корни исходного уравнения:

$$z_1 = 2t_1 = 1+i\cdot\sqrt{3}$$
$$z_2 = 2t_2 = -1+i\cdot\sqrt{3}$$
$$z_1 = 2t_3 = -2$$
$$z_4 = 2t_4 = -1-i\cdot\sqrt{3}$$
$$z_5 = 2t_5 = 1-i\cdot\sqrt{3}$$

Подводя общий итог, необходимо отметить, что все рассмотренные варианты решения приводят к одинаковым результатам (было бы странно, если б это было не так) и в заключение остаётся искренне поблагодарить своих уважаемых читателей за предложенные способы нахождения ответов.

опубликовано: 11.11.2023
изменено; 12.03.2025