Школьные задачи / Алгебра / А-12

Решите уравнение:

$$e^{4x}+\sqrt{e}=(\sqrt{e}+1)\cdot e^{2x}$$

Решение

Сделаем следующую замену переменных: $e^{2x}=t$. В этом случае:

$$e^{4x}=e^{2x\cdot 2}=(e^{2x})^2=t^2$$

Исходное уравнение тогда преобразуется к виду:

$$t^2+\sqrt{e}=(\sqrt{e}+1)\cdot t$$

Относительно переменной t оно является квадратным:

$$t^2-(\sqrt{e}+1)\cdot t+\sqrt{e}=0$$

Найдём его дискриминант D:

$$D=(-(\sqrt{e}+1))^2-4\cdot 1\cdot\sqrt{e}=(\sqrt{e}+1)^2-4\sqrt{e}=(\sqrt{e})^2+2\cdot\sqrt{e}\cdot 1+1^2-4\sqrt{e}=(\sqrt{e})^2-2\cdot\sqrt{e}\cdot 1+1^2=(\sqrt{e}-1)^2$$

Для удобства извлечём сначала квадратный корень из дискриминанта:

$$\sqrt{D}=\sqrt{(\sqrt{e}-1)^2}=|\sqrt{e}-1|=\sqrt{e}-1$$

($e>2>1$ и потому $\sqrt{e}>1$, значит подмодульное выражение неотрицательное и освобождается из-под модуля без изменения знака).

Корни квадратного уравнения в нашем случае будут равны

$$t_{1,2}=\frac{-(-(\sqrt{e}+1))\pm\sqrt{D}}{2\cdot 1}=\frac{\sqrt{e}+1\pm\sqrt{D}}{2}$$

Отсюда

$$t_1=\frac{\sqrt{e}+1+\sqrt{e}-1}{2}=\frac{2\sqrt{e}}{2}=\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}$$

$$t_2=\frac{\sqrt{e}+1-(\sqrt{e}-1)}{2}=\frac{\sqrt{e}+1-\sqrt{e}+1}{2}=1=e^0$$

Возвращаясь к старой переменной, получаем, что

$$e^{2x}=e^{\frac{1}{2}} \text{ или } e^{2x}=e^0$$

Первое равенство соблюдается только если $2x=\frac{1}{2}$. Отсюда $x_1=\frac{1}{4}$. Во втором случае необходимо, чтобы $2x=0$. Таким образом, второй корень уравнения есть $x_2=0$.

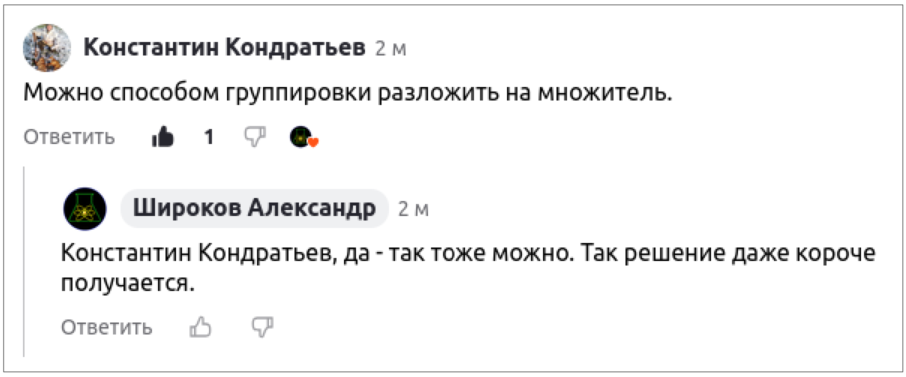
Ответ

$x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=0$

Комментарий

Спустя более полутора лет после публикации разбора данной задачи на дзен-канале появились сообщения от читателей о возможности альтернативных способов решения рассмотренного упражнения.

Первый такой «коммент» оставил пользователь «Константин Кондратьев»:



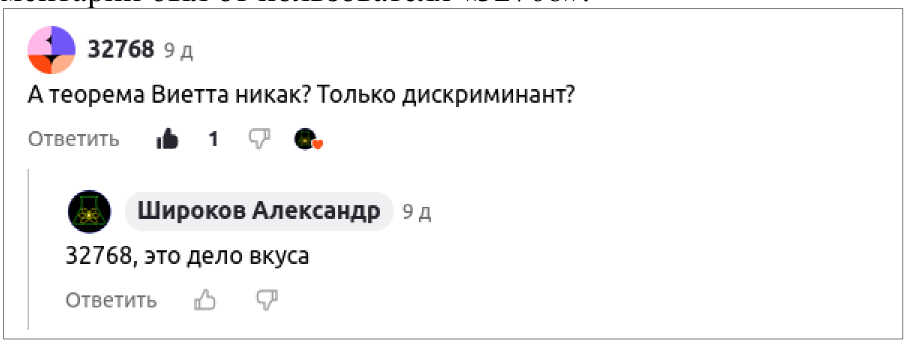
Константин Кондратьев 2 м
Можно способом группировки разложить на множитель.
Ответить 1

Широков Александр 2 м
Константин Кондратьев, да - так тоже можно. Так решение даже короче получается.
Ответить

Действительно, уравнение может быть решено группировкой, в ходе которой оно оказывается представлено как равное нулю произведение двух сомножителей:

$$e^{4x}+\sqrt{e}=(\sqrt{e}+1)\cdot e^{2x} \Leftrightarrow$$
$$e^{2x+2x}+\sqrt{e}-(\sqrt{e}+1)\cdot e^{2x}=0 \Leftrightarrow$$
$$e^{2x}\cdot e^{2x}+\sqrt{e}-e^{2x}\cdot\sqrt{e}-e^{2x}=0 \Leftrightarrow$$
$$e^{2x}\cdot e^{2x}-e^{2x}+\sqrt{e}-e^{2x}\cdot\sqrt{e}=0 \Leftrightarrow$$
$$e^{2x}\cdot(e^{2x}-1)+\sqrt{e}\cdot(1-e^{2x})=0 \Leftrightarrow$$
$$e^{2x}\cdot(e^{2x}-1)-\sqrt{e}\cdot(e^{2x}-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$(e^{2x}-1)\cdot(e^{2x}-\sqrt{e})=0 \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} e^{2x}-1=0 \\ e^{2x}-\sqrt{e}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^{2x}=1 \\ e^{2x}=\sqrt{e} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} e^{2x}=e^{0} \\ e^{2x}=e^{\frac{1}{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=0 \\ 2x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Второй комментарий был от пользователя «32768»:



32768 9 д
А теорема Виетта никак? Только дискриминант?
Ответить 1

Широков Александр 9 д
32768, это дело вкуса
Ответить

Здесь речь идёт о весьма элегантном способе нахождения корней уравнения

$$t^2-(\sqrt{e}+1)\cdot t+\sqrt{e}=0$$

Трудно не согласиться, что при помощи теоремы Виета довольно легко подобрать два числа, сумма которых равна $(\sqrt{e}+1)$, а произведение $\sqrt{e}$. Разумеется, это $\sqrt{e}$ и 1:

$$t_1=\sqrt{e} \qquad t_2=1$$

В данном случае удаётся вообще обойтись без громоздких преобразований, сопряжённых с нахождением дискриминанта.

опубликовано: 18.01.2023
изменено: 26.11.2024