

Школьные задачи / Алгебра / А-97

Построить на координатной плоскости график уравнения

$$\operatorname{sgn} y \cdot \operatorname{sgn} x = k,$$

если: а) $k = 0$; б) $k = 1$; в) $k = -1$ (функция знака действительного числа t или «сигнум» обозначается как $\operatorname{sgn} t$ и принимает нулевое значение при $t = 0$, а при положительных и отрицательных значениях аргумента равна 1 и -1 соответственно).

Решение

В соответствии с определением сигнум принимает только три возможных целых значения: 0, 1 и -1 .

а) $k = 0$

Уравнение в этом случае имеет вид:

$$\operatorname{sgn} y \cdot \operatorname{sgn} x = 0$$

Произведение двух величин равно нулю, если хотя бы одна из них равна нулю:

$$\operatorname{sgn} y \cdot \operatorname{sgn} x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sgn} y = 0 \\ \operatorname{sgn} x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Выражение $y = 0$ на координатной плоскости описывает горизонтальную прямую линию, совпадающую с осью абсцисс, а $x = 0$ – вертикальную прямую, совпадающую с осью ординат. Таким образом графиком уравнения является совокупность этих прямых, образующих крестообразную фигуру.

б) $k = 1$

Здесь исходное уравнение запишется так:

$$\operatorname{sgn} y \cdot \operatorname{sgn} x = 1$$

Произведение двух целых величин равно единице в двух случаях: или они сами равны 1, или же они обе равны -1 . Поэтому

$$\operatorname{sgn} y \cdot \operatorname{sgn} x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sgn} y = 1 \\ \operatorname{sgn} x = 1 \\ \operatorname{sgn} y = -1 \\ \operatorname{sgn} x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \\ y < 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Полученному объединению двух систем и, соответственно, уравнению отвечают точки координатной плоскости, расположенные в первом и третьем квадрантах (см. также решение задания А-78).

в) $k = -1$

Для данного варианта уравнение выглядит как:

$$\operatorname{sgn} y \cdot \operatorname{sgn} x = -1$$

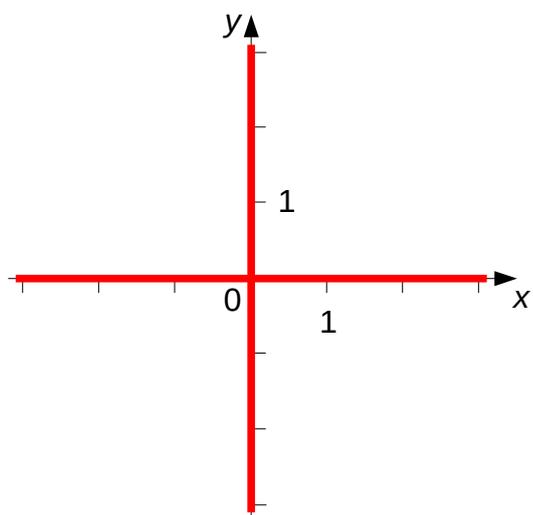
Произведение двух целых величин a и b равно -1 в двух случаях: или $a = 1, b = -1$, или $a = -1, b = 1$. Поэтому

$$\operatorname{sgn} y \cdot \operatorname{sgn} x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sgn} y = 1 \\ \operatorname{sgn} x = -1 \\ \operatorname{sgn} y = -1 \\ \operatorname{sgn} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Полученный результат говорит о том, что уравнению отвечают точки координатной плоскости, расположенные во втором и четвёртом квадрантах.

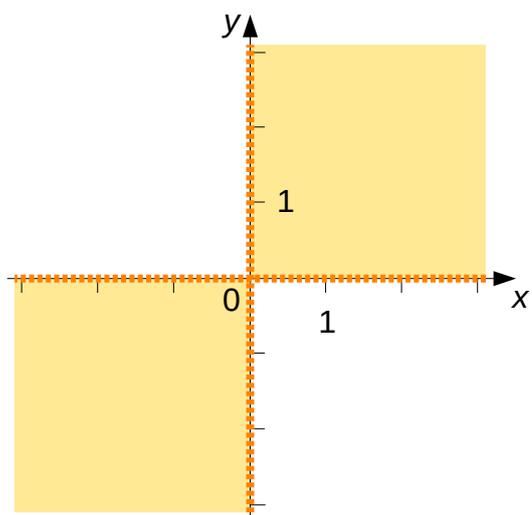
ОТВЕТ

а)



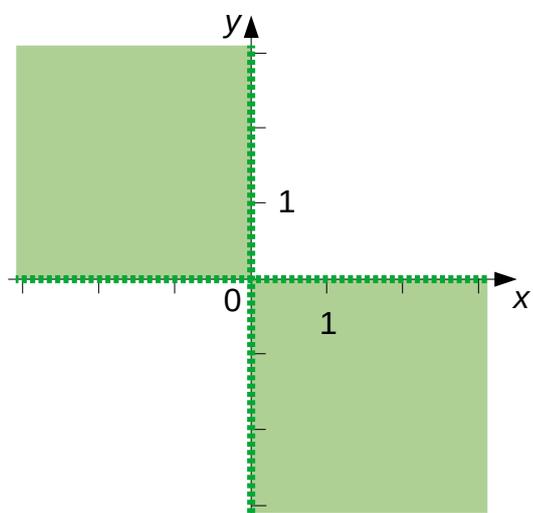
$$\operatorname{sgn} y \cdot \operatorname{sgn} x = 0$$

б)



$$\operatorname{sgn} y \cdot \operatorname{sgn} x = 1$$

в)



$$\operatorname{sgn} y \cdot \operatorname{sgn} x = -1$$

© Широков Александр, 22.07.2025