Про формулы сокращённого умножения и деление «столбиком»

На занятиях как в школе, так и в ВУЗе неизбежно к некоторым типам задач испытываешь определённую симпатию, такие задания нравится выполнять. В частности, моё пристрастие к решению химических задач на смешение двух растворов с применением «правила креста» было недавно отмечено одним из комментаторов на дзен-канале[*]. А намного раньше, на уроках алгебры, я особенно предпочитал задачи, в той или иной степени связанные с построением графиков функций[**]. Кстати, освоение такого понятия, как «производная» дало не только комплекс приёмов (нахождение асимптот, нулей функции, областей её возрастания и убывания, точек разрыва и перегиба), расширивший возможности по рисованию графиков, но и породило, если можно так выразиться, «чувство обиды за модуль», ведь при помощи него можно довольно простыми математическими выражениями описывать фигуры весьма затейливой формы (ученики классов с математическим уклоном прекрасно знают, о чём речь), но при этом как в таблице производных, так и в таблице первообразных, функцию $y = |x|$ встретить весьма проблематично, я ведь даже подобную «вопиющую несправедливость» пытался самостоятельно «исправить»[***].

Из того, что меня ещё в своё время удивило, до сих пор памятна такая штука: деление «столбиком» одного многочлена на другой, которое использовалось при решении уравнений высших степеней (мы этим в 10-м классе занимались). Удивление это быстро вылилось в самостоятельный вывод некоторых формул для разложения многочленов на множители. Именно об этом я и хочу рассказать ниже, поскольку почему-то и ныне помню ход своих рассуждений тех времён, а кроме того – подобный материал, как мне кажется, учителями математики вполне может быть использован в качестве задания на занятиях по алгебре.

Стимулом мне тогда послужил простой факт делимости $(x^3 - 1)$ на $(x - 1)$, хотя, он весьма тривиален, если помнить соответствующую формулу сокращённого умножения и что $1 = 1^3$:

$$x^3 - 1^3 = (x - 1)\cdot(x^2 + x\cdot 1 + 1^2)$$

Следующим простым и логичным шагом была попытка разделить «столбиком» (то есть так, как совсем недавно научили) многочлен $(x^3 - c^3)$ на $(x - c)$ (под c подразумевалось постоянное действительное число). И о чудо – частное получилось таким, каким и должно быть, если воспользоваться соответствующей формулой разложения на множители (хотя кто бы сомневался, что могло выйти иначе!):

$$
\begin{array}{llll|l}
x^3 & & & -\,c^3 & x - c \\ \cline{5-5}
-\;x^3 - cx^2 & & & & x^2 + cx + c^2 \\ \cline{1-1}
 & cx^2 & & & \\
 & -\;cx^2 - c^2x & & & \\ \cline{2-2}
 & & c^2x - c^3 & & \\
 & & -\;c^2x - c^3 & & \\ \cline{3-3}
 & & 0 & &
\end{array}
$$

---

* См. заметку «Школьные задачи / Химия / X-12» (URL: https://dzen.ru/a/ZPA_zu43GXuwIutp).

** См. заметку «Школьные задачи» (URL: http://shurichimik.narod.ru/consideration/05school-tasks/05school-tasks.htm).

*** См. заметку «Модуль. Производная и интеграл» (URL: http://shurichimik.narod.ru/consideration/04module/module.htm).

Аналогичная операция была провёрнута с многочленом $(x^3 + c^3)$ – он прекрасно поделился на $(x + c)$.

Получив таком образом известные формулы сокращённого умножения для разности и суммы кубов, которые обычно просто даются на уроках «как есть», без вывода, я пошёл дальше и рассмотрел выражение

$$x^5 - c^5$$

Весьма легко заметить, что оно обращается в ноль при подстановке $x = c$, то есть уравнение

$$x^5 - c^5 = 0$$

имеет «лежащий на виду» корень, но это же и означает, что оно представимо в виде

$$(x - c)\cdot A(x) = 0,$$

где $A(x)$ – некий многочлен. Отсюда следует, что $(x^5 - c^5)$ точно делится на $(x - c)$ и $A(x)$ вполне можно отыскать, используя всё тот же алгоритм деления «столбиком»:

$$\begin{array}{r|l}
x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad - c^5 & x - c \\ \cline{2-2}
-\;\underline{x^5 - cx^4} \qquad\qquad\qquad\qquad & x^4 + cx^3 + c^2x^2 + c^3x + c^4 \\
cx^4 \qquad\qquad\qquad\quad & \\
-\;\underline{cx^4 - c^2x^3} \qquad\qquad\quad & \\
c^2x^3 \qquad\qquad\quad & \\
-\;\underline{c^2x^3 - c^3x^2} \qquad\quad & \\
c^3x^2 \qquad\quad & \\
-\;\underline{c^3x^2 - c^4x} \quad & \\
c^4x - c^5 & \\
-\;\underline{c^4x - c^5} & \\
0 &
\end{array}$$

Если теперь равенство

$$x^5 - c^5 = (x - c)\cdot(x^4 + cx^3 + c^2x^2 + c^3x + c^4)$$

привести к более привычному виду, заменив x на a, а c на b, то получится формула разложения на множители разности двух чисел, возведённых в пятую степень:

$$a^5 - b^5 = (a - b)\cdot(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

Замена $x = a$, а $c = -b$ даёт ещё одну формулу, на этот раз – разложение на множители суммы двух чисел, возведённых в пятую степень:

$$a^5 - (-b)^5 = (a - (-b))\cdot(a^4 + (-b)a^3 + (-b)^2a^2 + (-b)^3a + (-b)^4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^5 + b^5 = (a + b)\cdot(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

На основании полученных результатов я смог записать эти формулы обобщённо:

$$a^5 \pm b^5 = (a \pm b)\cdot(a^4 \mp a^3b + a^2b^2 \mp ab^3 + b^4)$$

Затем описанный выше приём был использован для получения и вот такого разложения:

$$a^7 \pm b^7 = (a \pm b)\cdot(a^6 \mp a^5b + a^4b^2 \mp a^3b^3 + a^2b^4 \mp ab^5 + b^6)$$

Ну а далее моё внимание переключилось на какие-то другие вещи (что вполне нормально для пятнадцатилетнего оболтуса) и «копать» глубже в попытках поисках закономерности в полученных формулах я не стал, остановившись на достигнутом.

Не так давно на канале “Valery Volkov” появилось видео*, демонстрирующее вывод обобщённой формулы разложения на множители для (a^n – b^n) – рекомендую к ознакомлению, к тому же именно этот материал заставил вспомнить подробности о своих былых «математических потугах», результаты которых предложены вашему вниманию.

* Видеоролик «Вывод формулы для разности n-х степеней» (URL: https://dzen.ru/video/watch/651d98c076af334636c26a39).