

ПРАВИЛО КРЕСТА

В школьном курсе химии среди расчётных задач встречаются те, которые связаны с приготовлением раствора заданной концентрации смешением двух растворов, концентрации которых известны. Решение подобных задач обычно производится с применением так называемого «правила креста». Оно весьма просто для запоминания, но по причине некоторой неочевидности может восприниматься как некое «шаманство». Разумеется, ничего необычного в правиле креста нет, оно достаточно просто обосновывается математически. Именно это обоснование изложено ниже, причём для понимания его достаточно школьных знаний по алгебре 8 класса.

Задача:

Дано два раствора вещества с массовыми концентрациями (массовыми долями) w_x и w_y . В каком соотношении их нужно смешать между собой, чтобы получить раствор с промежуточной концентрацией w_z ?

Решение:

Введём следующие обозначения. Пусть для получения раствора с концентрацией (массовой долей) w_z требуется смешать x г раствора с концентрацией w_x и y г раствора с концентрацией w_y . Таким образом в задаче требуется найти величину x/y (отношение масс смешиваемых растворов). Будем считать, что

$$w_x < w_z < w_y.$$

Обозначим массу раствора с концентрацией w_z как z г. Очевидно, что

$$x + y = z.$$

Масса вещества в x г раствора с концентрацией w_x равна:

$$w_x \cdot x$$

Масса вещества в y г раствора с концентрацией w_y составит:

$$w_y \cdot y$$

Масса вещества в z г раствора с концентрацией w_z будет:

$$w_z \cdot z$$

При смешивании растворов массы растворённых в них веществ складываются, то есть

$$w_x \cdot x + w_y \cdot y = w_z \cdot z$$

Таким образом получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x + y = z \\ w_x \cdot x + w_y \cdot y = w_z \cdot z \end{cases}$$

Для решения этой системы умножим правую и левую части верхнего уравнения на w_x , после чего вычтем его из нижнего уравнения. Получим:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y = z \\ w_x \cdot x + w_y \cdot y - w_x \cdot x - w_x \cdot y = w_z \cdot z - w_x \cdot z \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z \\ w_y \cdot y - w_x \cdot y = w_z \cdot z - w_x \cdot z \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z \\ y \cdot (w_y - w_x) = z \cdot (w_z - w_x) \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = z - y \\ y = \frac{z \cdot (w_z - w_x)}{w_y - w_x} \end{cases} \end{aligned}$$

Найдём теперь x :

$$\begin{aligned}
 x = z - y &= z - \frac{z \cdot (w_z - w_x)}{w_y - w_x} = \frac{z \cdot (w_y - w_x)}{w_y - w_x} - \frac{z \cdot (w_z - w_x)}{w_y - w_x} = \\
 &= \frac{z \cdot (w_y - w_x) - z \cdot (w_z - w_x)}{w_y - w_x} = \frac{z \cdot (w_y - w_x - w_z + w_x)}{w_y - w_x} = \frac{z \cdot (w_y - w_z)}{w_y - w_x}
 \end{aligned}$$

Таким образом, исходная система уравнений имеет следующее решение:

$$x = \frac{z \cdot (w_y - w_z)}{w_y - w_x}; y = \frac{z \cdot (w_z - w_x)}{w_y - w_x}$$

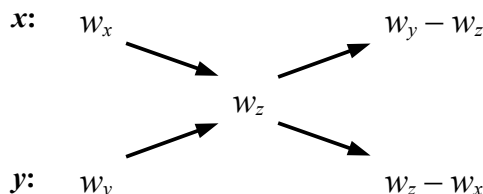
Теперь остаётся найти отношение x/y :

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{z \cdot (w_y - w_z)}{w_y - w_x}}{\frac{z \cdot (w_z - w_x)}{w_y - w_x}} = \frac{z \cdot (w_y - w_z)}{w_y - w_x} \cdot \frac{w_y - w_x}{z \cdot (w_z - w_x)} = \frac{w_y - w_z}{w_z - w_x}$$

Иными словами, для получения раствора с концентрацией w_z нужно смешать растворы с концентрациями w_x и w_y в следующем соотношении:

$$\frac{x}{y} = \frac{w_y - w_z}{w_z - w_x}$$

Данная пропорция и является математическим выражением правила креста, поскольку оно графически изображается следующим образом:



Приведённая мнемоническая схема означает, что для приготовления раствора с концентрацией w_z нужно смешать $(w_y - w_z)$ массовых частей раствора с концентрацией w_x и $(w_z - w_x)$ массовых частей раствора с концентрацией w_y .

Правило креста справедливо и для случая, когда вместо массовой концентрации w используется молярная c . В этом случае исходная задача переформулируется так: «Дано два раствора вещества с молярными концентрациями c_x моль/л и c_y моль/л. В каком соотношении их нужно смешать между собой, чтобы получить раствор с промежуточной концентрацией c_z моль/л?».

Введя обозначения: x л – объём раствора с концентрацией c_x , y л – объём раствора с концентрацией c_y и z л – суммарный объём конечного раствора с концентрацией c_z ($c_x < c_z < c_y$), можно с учётом того, что при смешивании растворов количества растворённых в них веществ складываются, записать систему уравнений, с точностью до обозначений совпадающую с рассмотренной выше:

$$\begin{cases} x + y = z \\ c_x \cdot x + c_y \cdot y = c_z \cdot z \end{cases}$$

В связи с этим искомое соотношение объёмов растворов x/y будет иметь аналогичный вид:

$$\frac{x}{y} = \frac{c_y - c_z}{c_z - c_x}$$

Как легко догадаться, мнемоническая схема для молярных концентраций будет иметь вид, подобный случаю с массовыми концентрациями.

© Широков Александр, 19.08.2020