«Теория средних» или Моё математическое графоманство

«Вы, профессор, воля ваша, что-то нескладное придумали! Оно, может, и умно, но больно непонятно. Над вами потешаться будут»

«Мастер и Маргарита», Булгаков М. А.

Жизнь у всех разная и проявляется это ещё и в том, что источники информации, с которыми мы имеем дело, тоже у всех различны. Кроме этого, далеко не каждые сведения оставляют нас равнодушными, не вызывая совершенно никаких эмоций или мыслей. При этом иногда сочетание данных из двух источников может побуждать к весьма своеобразным умозаключениям.

Есть у меня одна книга – пособие для учителя информатики [1]. Не помню, как она у меня появилась – может купил, а может мне её кто-то подарил – однако в школе она мне как-то пригодилась в освоении языка Basic, программы на котором мы тогда собственноручно набивали на болгарских машинах «Правец 8А». Именно из этой книги я когда-то впервые узнал, что помимо так называемого среднего арифметического для нескольких чисел бывает, например, ещё и среднее квадратическое.

На первом курсе (1999-2000 гг.) университета, на лекциях по высшей математике, когда мы проходили определённые интегралы, была упомянута так называемая «теорема о среднем» [2, с. 353]. И вот это-то, в комбинации с сидящими в памяти сведениями из упомянутой книги, почему-то отозвалось в мозгах вопросом: «А какое именно среднее имеется в виду в теореме: арифметическое, кубическое или какое-нибудь другое?». Ну а раз возник вопрос – можно попытаться найти и ответ. Поиск сей вскоре привёл меня к тому, что, собственно, и составляет основу материала данной заметки. Свои измышления я условно назвал «теорией средних» и достаточно долгое время они хранились у меня в виде конспекта. Теперь же результаты этой «мозговой гимнастики» я выложил в сеть по следующим соображениям. Во-первых, если на этот материал наткнётся математик, то, думается, это сможет его повеселить. Во-вторых, мне слабо верится, что никто из профессиональных математиков в своих работах не додумался до чего-то подобному тому, что изложено здесь. В связи с этим мне особенно интересно было бы узнать, чьи это результаты мной, вероятно, «переоткрыты» – к сожалению, я не располагаю возможностью и временем это выяснить самостоятельно, но буду очень благодарен за сведения об этом.

I. Типы средних (введение)

Пусть у нас имеется множество из n чисел $x_1, x_2, \ldots x_n$.

а) Среднее арифметическое этих чисел:

$$\bar{x}_a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1)$$

б) Среднее квадратическое:

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

в) Среднее кубическое:

$$\bar{x}_k = \sqrt[3]{\frac{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3}{n}} = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \right)^{\frac{1}{3}} \qquad (3)$$

г) Если ни одно из чисел рассматриваемого множества не равно нулю, то для них можно вычислить среднее гармоническое [1, с. 132]:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \ldots \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \qquad (4)$$

Материал сайта shurichimik.narod.ru

II. Средние значения функции на замкнутом числовом промежутке

Рассмотрим непрерывную функцию $y=f(x)$, определённую на отрезке $[a; b]$. Разобьём $[a; b]$ на n равных частей величиной $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ каждый. Теперь внутри каждого отрезка разбиения Δx_i произвольно выберем точку C_i $(i=\overline{1, \dots, n})$ и вычислим значение функции $y=f(x)$ в точке C_i: $y_i=f(C_i)$ (Рисунок 1). Для полученного таким образом множества значений по формулам (1), (2), (3) можно вычислить средние арифметическое, квадратическое и кубическое:

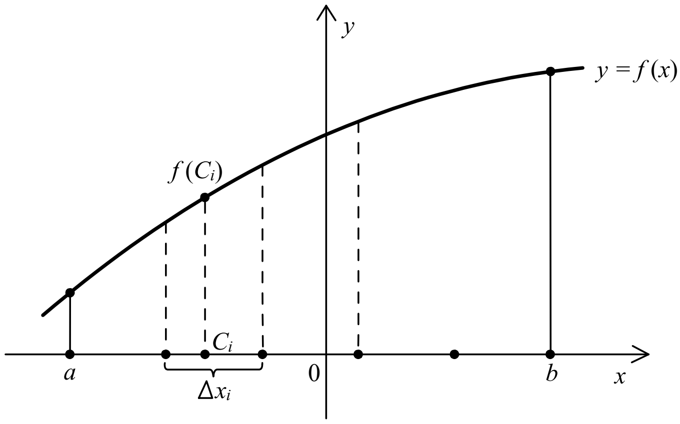

Рисунок 1.

$$\bar{y}_a = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(C_i) \qquad (5)$$

$$\bar{y}_q = \left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} [f(C_i)]^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (6)$$

$$\bar{y}_k = \left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} [f(C_i)]^3\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (7)$$

В случае, если $f(x)$ на $[a; b]$ ни в одной точке не обращается в ноль, то по (4) можно вычислить и среднее гармоническое:

$$\bar{y}_h = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{f(C_i)}} \qquad (8)$$

Будем теперь увеличивать неограниченно n и найдём пределы выражений (5), (6), (7) и (8) при $n \to \infty$. Если эти пределы существуют для рассматриваемой функции $y=f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то назовём их, соответственно, средним арифметическим, средним квадратическим, средним кубическим и средним гармоническим значениями функции $y=f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Введём обозначения:

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\, f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\right) \qquad (9)$$

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}\, f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} [f(C_i)]^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{kub}}\, f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} [f(C_i)]^3\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (11)$$

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{harm}}\, f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{f(C_i)}} \qquad (12)$$

Для удобства операторы $\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}$, $\underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}$, $\underset{[a;b]}{\mathrm{kub}}$ и $\underset{[a;b]}{\mathrm{harm}}$ назовём арифией, квадрией, кубинией и гармонией соответственно.

III. Вычисление арифии функции на замкнутом числовом промежутке

Вернёмся к Рисунку 1. Составим для функции $f(x)$ интегральную сумму Римана:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\cdot\frac{b-a}{n}$$

Материал сайта shurichimik.narod.ru

Эта сумма при неограниченном возрастании n имеет предел, равный интегралу:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\cdot\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

Величина $(b - a)$ – длина отрезка $[a; b]$ – число постоянное, поэтому

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\right) \tag{13}$$

Подставим (9) в (13):

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot\operatorname*{ariph}_{[a;b]} f(x)$$

или

$$\operatorname*{ariph}_{[a;b]} f(x) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx \tag{14}$$

Из (14) как раз и следует ответ на возникший у меня вопрос: в теореме о среднем фигурирует именно среднее арифметическое значение функции на отрезке (придуманная мной «арифия»).

IV. Свойства арифии функции на отрезке

Свойство 1 (свойство линейности оператора арифии):

$$\operatorname*{ariph}_{[a;b]}\big(C_1\cdot f(x)+C_2\cdot g(x)\big) = C_1\cdot\operatorname*{ariph}_{[a;b]} f(x) + C_2\cdot\operatorname*{ariph}_{[a;b]} g(x) \tag{15}$$

(C_1 и C_2 – постоянные числа, $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные и определённые на $[a; b]$ функции).

Доказательство:

$$\operatorname*{ariph}_{[a;b]}\big(C_1\cdot f(x)+C_2\cdot g(x)\big) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b\big(C_1\cdot f(x)+C_2\cdot g(x)\big)dx =$$

$$= C_1\cdot\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx + C_2\cdot\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b g(x)dx = C_1\cdot\operatorname*{ariph}_{[a;b]} f(x) + C_2\cdot\operatorname*{ariph}_{[a;b]} g(x)$$

Свойство 2. Если C=const, то

$$\operatorname*{ariph}_{[a;b]} C = C \tag{16}$$

Доказательство:

$$\operatorname*{ariph}_{[a;b]} C = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b C\cdot dx = \frac{C}{b-a}\cdot(b-a) = C$$

Свойство 3. Если $a < c < b$, то

$$\operatorname*{ariph}_{[a;b]} f(x) = \frac{c-a}{b-a}\cdot\operatorname*{ariph}_{[a;c]} f(x) + \frac{b-c}{b-a}\cdot\operatorname*{ariph}_{[c;b]} f(x) \tag{17}$$

Доказательство:

$$\operatorname*{ariph}_{[a;b]} f(x) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\left((c-a)\cdot\operatorname*{ariph}_{[a;c]} f(x) + (b-c)\cdot\operatorname*{ariph}_{[c;b]} f(x)\right) =$$

$$= \frac{c-a}{b-a}\cdot\operatorname*{ariph}_{[a;c]} f(x) + \frac{b-c}{b-a}\cdot\operatorname*{ariph}_{[c;b]} f(x)$$

Свойство 4. Если $f(x)$ – чётная функция и $a > 0$, то

$$\operatorname*{ariph}_{[-a;a]} f(x) = \operatorname*{ariph}_{[-a;0]} f(x) = \operatorname*{ariph}_{[0;a]} f(x) \tag{18}$$

Материал сайта shurichimik.narod.ru

Доказательство:
Так как $f(x)$ – чётная, то

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx \Leftrightarrow (0-(-a))\cdot \underset{[-a;0]}{\mathrm{ariph}}\, f(x) = (a-0)\cdot \underset{[0;a]}{\mathrm{ariph}}\, f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{[-a;0]}{\mathrm{ariph}}\, f(x) = \underset{[0;a]}{\mathrm{ariph}}\, f(x)$$

Далее: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2a\cdot \underset{[-a;a]}{\mathrm{ariph}}\, f(x)$, а $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)dx = 2a\cdot \underset{[0;a]}{\mathrm{ariph}}\, f(x)$. Отсюда:

$$\underset{[-a;a]}{\mathrm{ariph}}\, f(x) = \underset{[0;a]}{\mathrm{ariph}}\, f(x).$$

<u>Свойство 5</u>. Если $f(x)$ – нечётная функция, то

$$\underset{[-a;a]}{\mathrm{ariph}}\, f(x) = 0 \tag{19}$$

$$\underset{[-a;0]}{\mathrm{ariph}}\, f(x) + \underset{[0;a]}{\mathrm{ariph}}\, f(x) = 0 \tag{20}$$

Доказательство:

Так как $f(x)$ – нечётная, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, отсюда

$$\underset{[-a;a]}{\mathrm{ariph}}\, f(x) = \frac{1}{2a}\cdot\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\cdot \underset{[-a;0]}{\mathrm{ariph}}\, f(x) + a\cdot \underset{[0;a]}{\mathrm{ariph}}\, f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{[-a;0]}{\mathrm{ariph}}\, f(x) + \underset{[0;a]}{\mathrm{ariph}}\, f(x) = 0$$

<u>Свойство 6</u>.

$$\left|\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\, f(x)\right| \le \underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\, |f(x)| \tag{21}$$

Доказательство:

Известно, что $\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \le \int_{a}^{b} |f(x)|\,dx$. Домножим обе части этого неравенства на $(b-a)$ $(b-a>0)$:

$$(b-a)\cdot\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \le (b-a)\cdot\int_{a}^{b} |f(x)|\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|(b-a)\cdot\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \le (b-a)\cdot\int_{a}^{b} |f(x)|\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\, f(x)\right| \le \underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\, |f(x)|$$

V. Вычисление квадрии, кубинии и гармонии функции на отрезке

Пусть $g_1(x)=[f(x)]^2$, тогда

Материал сайта shurichimik.narod.ru

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}\, f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}[f(C_i)]^2\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}g_1(C_i)\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}g_1(C_i)\right)}=\sqrt{\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\, g_1(x)}=\sqrt{\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\,[f(x)]^2}$$

Итак:

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}\, f(x)=\sqrt{\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\,[f(x)]^2} \tag{22}$$

Пусть теперь $g_2(x)=[f(x)]^3$, тогда

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{kub}}\, f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}[f(C_i)]^3\right)^{\frac{1}{3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}g_2(C_i)\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}g_2(C_i)\right)}=\sqrt[3]{\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\, g_2(x)}=\sqrt[3]{\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\,[f(x)]^3}$$

или

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{kub}}\, f(x)=\sqrt[3]{\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\,[f(x)]^3} \tag{23}$$

Пусть теперь функция $f(x)$ на $[a;\,b]$ ни в одной точке не принимает нулевого значения. Обозначим $g_3(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{harm}}\, f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{f(C_i)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}g_3(C_i)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}g_3(C_i)}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}g_3(C_i)\right)}=\frac{1}{\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\, g_3(x)}=\frac{1}{\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\,\frac{1}{f(x)}}$$

Окончательно:

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{harm}}\, f(x)=\frac{1}{\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\,\frac{1}{f(x)}} \tag{24}$$

VI. Свойства квадрии, кубинии и гармонии функции на отрезке

Свойство 7.

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}\, C=|C|,\ (C=\mathrm{const}) \tag{25}$$

Доказательство:

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}\, C=\sqrt{\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\ C^2}=\sqrt{C^2}=|C|$$

Свойство 8.

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}(C\cdot f(x))=|C|\cdot\underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}\, f(x) \tag{26}$$

Доказательство:

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}(C\cdot f(x))=\sqrt{\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\ C^2\cdot[f(x)]^2}=\sqrt{C^2\cdot\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\,[f(x)]^2}=$$

$$=|C|\cdot\sqrt{\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\,[f(x)]^2}=|C|\cdot\underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}\, f(x)$$

Аналогично доказываются следующие соотношения:

Материал сайта shurichimik.narod.ru

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{kub}}\, C = C \qquad (27)$$

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{kub}}(C \cdot f(x)) = C \cdot \underset{[a;b]}{\mathrm{kub}}\, f(x) \qquad (28)$$

и (если $C \neq 0$)

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{harm}}\, C = C \qquad (29)$$

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{harm}}(C \cdot f(x)) = C \cdot \underset{[a;b]}{\mathrm{harm}}\, f(x) \qquad (30)$$

Свойство 9.

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}\, | f(x) | = \underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}\, f(x) \qquad (31)$$

Доказательство:

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}\, | f(x) | = \sqrt{\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\, [| f(x) |]^2} = \sqrt{\underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\, [f(x)]^2} = \underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}\, f(x)$$

Свойство 10.

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}^2 \big(f(x) + g(x)\big) = \underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}^2\, f(x) + \underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}^2\, g(x) + 2 \cdot \underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}} \big(f(x) \cdot g(x)\big) \qquad (32)$$

Доказательство:
Из (22):

$$\underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}^2 \big(f(x) + g(x)\big) = \underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}} \big(f(x) + g(x)\big)^2 =$$
$$= \underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}} \big([f(x)]^2 + 2 \cdot f(x) \cdot g(x) + [g(x)]^2\big) =$$
$$= \underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\, [f(x)]^2 + \underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}}\, [g(x)]^2 + 2 \cdot \underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}} \big(f(x) \cdot g(x)\big) =$$
$$= \underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}^2\, f(x) + \underset{[a;b]}{\mathrm{quadr}}^2\, g(x) + 2 \cdot \underset{[a;b]}{\mathrm{ariph}} \big(f(x) \cdot g(x)\big)$$

VII. Среднее значение функции нескольких переменных

По аналогии со средним значением функции на замкнутом числовом промежутке можно рассмотреть вопрос о среднем значении функции нескольких переменных в некоторой области значений её аргументов. Рассмотрим это на примере непрерывной функции двух независимых переменных $z=f(x, y)$, определённой в некоторой области прямоугольной формы D. Разобьём эту область на $k=n \cdot m$ (n, m – целые числа) одинаковых площадок, внутри каждой из них произвольно выберем точку C_i ($i = \overline{1, \ldots, k}$) и вычислим значение функции z_i в каждой из них (Рисунок 2). Далее, по аналогии с (5) можно вычислить среднее полученных значений функции (например, среднее арифметическое):

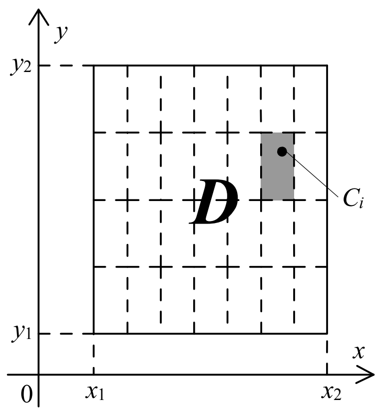

Рисунок 2.

$$\bar{z}_a = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} z_i \qquad (33)$$

Теперь можно начать неограниченно увеличивать n и m (и, соответственно, k) и найти предел выражения (33) при $n \to \infty$, $m \to \infty$ ($k \to \infty$). Если этот предел существует для рассматриваемой функции, то его можно назвать средним арифметическим значением функции $f(x, y)$ в области D. По аналогии с (9) можно ввести обозначение:

$$\underset{D}{\mathrm{ariph}}\, f(x, y) = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} f(C_i) \right) \qquad (34)$$

В соответствии с Рисунком 2 площадь каждого из k участков разбиения области D равна (S_D – площадь области D):

Материал сайта shurichimik.narod.ru

$$S_i = \frac{S_D}{k} = \frac{(x_2 - x_1)\cdot(y_2 - y_1)}{n\cdot m}$$

Составим для функции $f(x, y)$ интегральную сумму Римана:

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} f(C_i)\cdot S_i$$

Эта сумма при неограниченном возрастании k имеет предел, равный следующему интегралу:

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_k = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} f(C_i)\cdot\frac{S_D}{k}\right) = \iint_D f(x,y)dxdy$$

Так как S_D – число постоянное, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = S_D\cdot\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} f(C_i)\cdot\frac{1}{k}\right) = S_D\cdot\underset{D}{\mathrm{ariph}}\, f(x,y)$$

Из полученного равенства следует формула для вычисления арифии функции двух переменных в области D:

$$\underset{D}{\mathrm{ariph}}\, f(x,y) = \frac{1}{S_D}\cdot\iint_D f(x,y)dxdy \tag{35}$$

Используя похожие рассуждения, можно также ввести определения для квадрии, кубинии и гармонии и получить формулы для их вычисления. Например:

$$\underset{D}{\mathrm{quadr}}\, f(x,y) = \sqrt{\underset{D}{\mathrm{ariph}}\,[f(x,y)]^2} \tag{36}$$

Для функции трёх переменных $t=f(x, y, z)$ формула для вычисления арифии в области v, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда объёмом V_v, выглядит следующим образом:

$$\underset{v}{\mathrm{ariph}}\, f(x,y,z) = \frac{1}{V_v}\cdot\iiint_v f(x,y,z)dxdydz \tag{37}$$

При желании можно исследовать и свойства таких «средних». Так, оператор арифии обладает свойством линейности для функций одного, двух и трёх независимых переменных. Кроме этого, нетрудно заметить, что арифия во всех рассматриваемых случаях вычисляется сходным образом. Это позволяет написать условную обобщённую формулу для её вычисления: если мы имеем некоторую функцию F, то её среднее арифметическое значение в некоторой области M будет равно частному соответствующего интеграла функции по этой области и меры области (длины, площади или объёма):

$$\underset{M}{\mathrm{ariph}}\, F = \frac{\int_M F}{\mathrm{mes}\, M}. \tag{38}$$

В той книге по информатике была приведена ещё одна формула для среднего геометрического, определявшегося как корень степени n из произведения n чисел (надо полагать, неотрицательных). В принципе, ничто не мешает (с соответствующими оговорками и ограничениями) придумать «среднее геометрическое значение функции» и способ его вычисления (оно через логарифмирование фактически сводится к вычислению арифии логарифма исходной функции).

Литература:

[1]. Касаткин В.Н. Информация, алгоритмы, ЭВМ: Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1991. – 192 с.: ил.
[2]. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб.: в 2-х т. Т. 1 – СПб.: Мифрил. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1996. – 416 с.

© Широков Александр, 02.10.2011

Материал сайта shurichimik.narod.ru