Школьные задачи

Не знаю почему, но в школе на уроках алгебры задачи по построению графиков (или по изображению множества точек, координаты которых удовлетворяют каким-либо условиям), мне нравились больше остальных заданий. Полистав имеющийся дома задачник, я как-то (в классе девятом или десятом – точно уже не помню) придумал два интересных, как мне показалось, примера, и записал их на форзаце того же задачника, а по прошествии нескольких лет, случайно открыв его, увидел свои тогдашние пометки. Вот они:

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$x^2 + y^2 = |2x| + |2y| - 1$$

2. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} |y| \geqslant x^2 \\ |x| \geqslant y^2 \end{cases}$$

Кроме этого, в те годы мне удалось обнаружить одно интересное соотношение, справедливое для любых треугольников, которое также можно сформулировать в виде задачи:

3. Доказать, что сумма синусов углов треугольника равна отношению периметра треугольника к диаметру описанной вокруг него окружности.

Так получилось, что теперь у меня оказалось придуманным ещё некоторое количество других упражнений, которые можно смело предложить школьникам. Чтобы они не увеличивали объём данной заметки, я вынес их в отдельную тему в разделе «Самоделки» сайта[*].

Со временем правильность принятого решения стала очевидной – тема продолжила своё развитие и думается, что на момент написания этих строк не будет слишком большим преувеличением сказать о получившемся мини-задачнике по ряду школьных дисциплин, причём более-менее регулярно пополняющимся всё новыми заданиями с разборами их решения.

Все предлагаемые задачи придуманы самостоятельно, но поскольку одни и те же идеи частенько приходят в голову разным людям, нельзя исключить ситуацию, когда задание, подобное имеющемуся у меня, могло быть уже составлено кем-то другим. В связи с этим вынужден попросить своих уважаемых читателей обязательно сообщить, если действительно в более ранних интернет-публикациях или печатных изданиях обнаружится что-то из представленного – при наличии оснований мне нетрудно признать чужой приоритет и сослаться на истинный первоисточник.

Что мне служит вдохновением для сочинения новых задачек? Трудно сказать – просто как-то само приходит в голову, после чего остаётся сформулировать задание и оформить путь его решения. Возникновение некоторых упражнений связано с периодом, когда я занимался репетиторством и ещё далеко не все старые наработки, придуманные для своих тогдашних «подопечных», выложены у меня в свободный доступ. Непосредственно репетиторству, кстати, своим появлением обязана и группа публикаций, изучение содержимого которых, по моему скромному мнению, ученикам нисколько не повредит: «Правило креста», «Учим символы химических элементов», «О равносильных преобразованиях (для школьников)»[**].

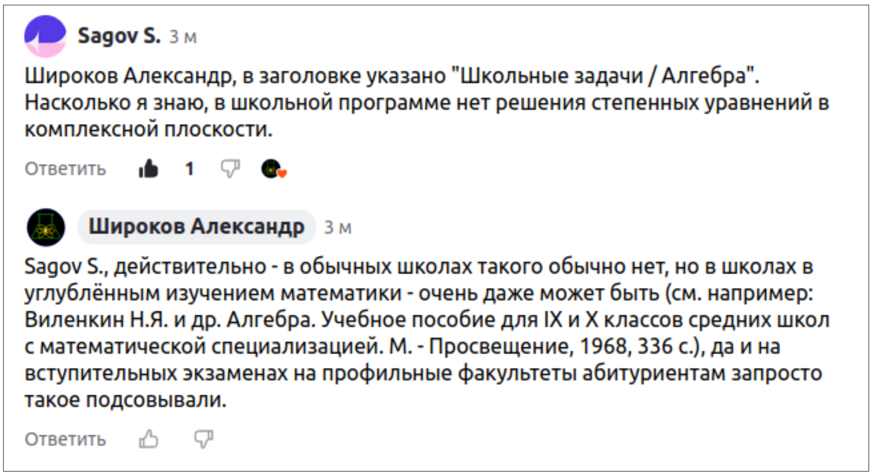
---

* URL: http://shurichimik.narod.ru/compcreative/15-school-tasks.htm .

** См. одноимённые заметки в разделе сайта «Соображалки» (URL: http://shurichimik.narod.ru/consideration/myconsiderations.htm).

Так как сами задачи выкладываются не только у меня на сайте, но и на Дзен-канале, то судя по имеющимся к ним комментариям стоит отдельно поговорить о сложности предлагаемых упражнений, так как отзывы на них бывают диаметрально противоположными.

Ладно, когда некоторым читателям действительно бывает непонятно, почему задачи затрагивают темы фактически из вузовского курса, считающегося более трудным для освоения (комментарий к заданию А-15):


Sagov S. 3 м

Широков Александр, в заголовке указано "Школьные задачи / Алгебра". Насколько я знаю, в школьной программе нет решения степенных уравнений в комплексной плоскости.

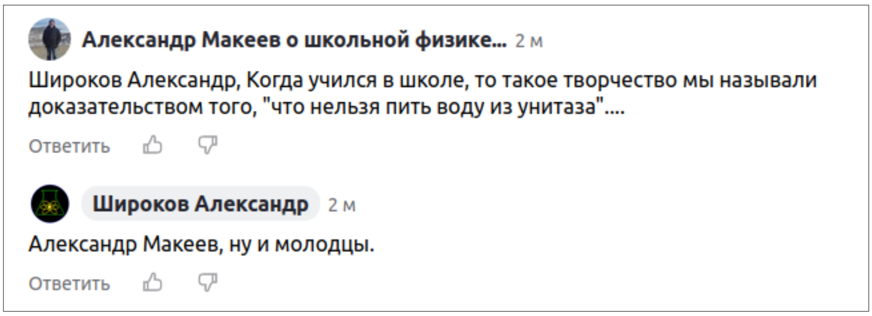
Ответить 1

Широков Александр 3 м

Sagov S., действительно - в обычных школах такого обычно нет, но в школах в углублённым изучением математики - очень даже может быть (см. например: Виленкин Н.Я. и др. Алгебра. Учебное пособие для IX и X классов средних школ с математической специализацией. М. - Просвещение, 1968, 336 с.), да и на вступительных экзаменах на профильные факультеты абитуриентам запросто такое подсовывали.

Ответить

Одновременно с этим попадаются отзывы, которые иначе как претензиями к излишней простоте не назовёшь (комментарии к задаче Ф-3):


Александр Макеев о школьной физике... 2 м

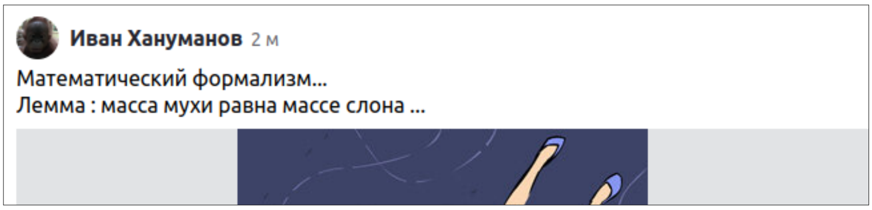
Широков Александр, Когда учился в школе, то такое творчество мы называли доказательством того, "что нельзя пить воду из унитаза"....

Ответить

Широков Александр 2 м

Александр Макеев, ну и молодцы.

Ответить


Иван Хануманов 2 м

Математический формализм...
Лемма : масса мухи равна массе слона ...

Ну что ж, давайте по пунктам.

Пункт первый, он же самый краткий. По моему мнению простота формулировки и решения задачи не отменяет её постановку, что уже отмечалось в пояснении к заданию Г-11.

Пункт второй. Понятие простоты, как оказывается, для всех разное. Вот по интернет-просторам гуляет одна задача, решение которой продемонстрировано, например, на канале «Этому не учат в школе»*. В ней требуется упростить выражение:

$$\sqrt{\sqrt{9}-\sqrt{8}}$$

Уверяю – очень многих школьников это задание вгоняет в ступор, ибо после извлечения корня из девяти и вынесения двойки из-под корня восьми они дальше продвинуться не могут. Поскольку я учился в классе с физико-математическим уклоном, то увидев это задание впервые уже через двадцать секунд понял, какой у него окончательный ответ. Более того – для меня это оказалось просто до такой степени, что я не только нужный комплекс преобразований провернул в уме, но и придумал, как можно модифицировать задание так, чтоб у него ответ «красивый» получился:

* Видеоролик «Южно-африканская олимпиада (обычная советская задача)» (URL: https://dzen.ru/video/watch/64e712fbc771a23b9cd5b871).

$$\sqrt{2}-\sqrt{\sqrt{9}-\sqrt{8}}$$

Если что, решается эта задача так:

$$\sqrt{2}-\sqrt{\sqrt{9}-\sqrt{8}}=\sqrt{2}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=$$
$$=\sqrt{2}-\sqrt{2+1-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1}=$$
$$=\sqrt{2}-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-|\sqrt{2}-1|=$$
$$=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-\sqrt{2}+1=1$$

Следует ли из этого, что я какой-то там очень способный к математике человек? Вовсе нет, сам я так не считаю, просто мне с учителями в школе повезло – они «всего лишь» добросовестно и полноценно делали своё дело, и как взрослые опытные люди, уловив что-то в юном балбесе, в нужный момент ненавязчиво подсовывали кое-какие книги. Учительница химии, например, после второй моей победы на районной олимпиаде одолжила сборник соответствующих задач – тренируйся, мол, дальше. Задания там были начиная от уровня областных олимпиад и до международных и надо сказать, что далеко не все они оказались мне по зубам, хотя я довольно настойчиво и долго пытался их одолеть.

К этому стоит добавить, что благодаря действиям учителей и администрации школы, меня дополнительно «обрабатывали» ещё и вузовские преподаватели. Каков итог всего этого? Прежде всего – первое место на областной олимпиаде по химии в одиннадцатом классе, на основании которого поступление на химфак было предельно льготным (фактически принёс документы в приёмную комиссию в первые дни её работы, где почти сразу же получил напутствие: «Молодой человек, поздравляем с поступлением, приходите в сентябре учиться, а пока ступайте отдыхать – лето всё-таки в самом разгаре»), далее были сданные на «отлично» все три экзамена по «матану» (у нас курс высшей математики читался три семестра и бытовало мнение, что выдержать его – чуть ли не главная трудность химфака) и относительно меньшие трудозатраты при освоении прочих учебных дисциплин.

Здесь надо обязательно упомянуть, что у многих моих однокурсников всё было совсем иначе, разница в уровне подготовки (именно подготовки, а не способностей!), полученной ими в их школах, оказалась довольно заметной, и это проявилось, например, в том, что на самых первых двух практических занятиях по математике одногруппники за мной банально списывать не успевали. Да, потом многие благодаря упорству «подтянулись» и очень успешно сдавали экзамены, но далось-то им это явно тяжелее, нежели мне. На сей день ситуация с описанной разностью в подготовке глобальных изменений по-прежнему не претерпела, ибо по прошествии двух с лишним десятков лет, да ещё с учётом ~~в хлам~~ отреформированной системы российского школьного образования, приходится констатировать, что как и раньше встречаются случаи, когда реально важный материал из базовой учебной программы не преподаётся – я уже писал*, что некоторые учителя математики игнорируют рассмотрение такого способа решения квадратных уравнений как «метод выделения полного квадрата».

Резюмируя второй пункт, остаётся только порадоваться за тех, кто находит мои задачи простыми, ведь это означает, что некоторым моим дорогим читателям тоже в своё время повезло. Убеждён, что они, как и я, своих преподавателей также вспоминают с чувством благодарности. И это чувство является одной из причин публикования хода решения придумываемых задач, так как позволяет показать заинтересованным школьникам разные приёмы и варианты путей рассуждений, а кроме этого – делает попытку подтолкнуть ученика задаться, как мне кажется, интересным вопросом, а это, в свою очередь, может повлечь и самостоятельный поиск ответа. Например: многие ли в школьные годы задумывались, почему формула для кинетической энергии такая, какая она есть? Между прочим, обоснование этого не в каждом вузовском учебнике по физике отыщешь. У меня же подозрения, что «е равно эм вэ квадрат пополам – не просто так» появились в старших классах, когда я сначала случайно осознал, что производная площади круга по радиусу есть длина ограничивающей его

* См. заметку «Об упрощении через усложнение» (URL: http://shurichimik.narod.ru/consideration/onepage/49-simpling.htm).

окружности, а уже вслед за этим обратил внимание, что первообразная функции $y(x) = kx$ чего-то мне напоминает:

$$\int kx\,dx = \frac{kx^2}{2} + C$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Именно нужному «подталкиванию» и посвящена задача Ф-3, а не «*математическому формализму*» и «*доказательству “что нельзя пить воду из унитаза”*». Судя по всему, я ошибся, полагая, что такая цель многим вполне очевидна и не нуждается в особых пояснениях.

Пункт третий будет касаться элементов вузовской учебной программы в школе.

Вряд ли кто-то станет спорить с утверждением, что, например, школьная химия и химия профильного факультета – это, как говорят в Одессе, две большие разницы. То же самое можно сказать про любую учебную дисциплину, хоть биологию, хоть историю. Поэтому, с одной стороны, замечания по поводу того, что декларируется задача для школьников, а по факту она для студентов, имеют полное право на существование. С другой же стороны не стоит забывать, что помимо общеобразовательных школ бывают школы специализированные (с углублённым изучением отдельных предметов) и там могут преподаваться весьма «матанистые» вещи, ведь некоторые из них даже школьникам вполне доступны для понимания. В качестве довольно наглядного примера могу привести такую штуку из линейной алгебры (сугубо вузовская тема, между прочим!) как операция перемножения матриц. Давайте скажем честно: правило нахождения произведения одной матрицы на другую достаточно простое и его алгоритм по силам освоить и пятикласснику, ведь там самое главное – не запутаться, из какого столбца и строки перемножать и складывать числа.

В свете сказанного я стараюсь соблюсти определённый баланс между тем, что любопытный школьник сможет осилить сам, а что – скорее всего нет. Насколько удачно это выходит – судить моим читателям. Так, задачи Г-13 и Г-18 представляются вполне допустимыми, а вот попытка копнуть ещё глубже в виде предложения доказать равенство нулю лапласиана объёма прямоугольного параллелепипеда мне уже кажется перебором. При этом нельзя отрицать, что совсем уж дотошные ученики, пусть даже и с помощью учителя, способны уяснить, что оператор Лапласа (лапласиан) Δ – это сумма вторых частных производных функции нескольких переменных по каждой переменной и если объём V прямоугольного параллелепипеда рассматривать как функцию трёх аргументов $V(a, b, c) = abc$, где a, b и c – длина, ширина и высота, то лапласиан запишется в виде

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2}{\partial b^2} + \frac{\partial^2}{\partial c^2},$$

откуда вполне логично вытекает упомянутое простое соотношение: $\Delta V = 0$. Кстати, не стоит думать, что сейчас все дети поголовно только и делают, как бестолково «в гаджетах залипают», среди них обязательно наличествуют и те, кто способен не ужаснуться, самостоятельно нагуглив сведения про то, что лапласиан – это ещё и «набла квадрат» ∇^2, и что бывают всякие там градиенты с дивергенциями и прочими роторами.

В конце остаётся отметить, что поскольку задачи у меня действительно разнятся по лёгкости, а выкладываются они по мере завершённости оформления, то недавно для пущего порядка и удобства я их дополнительно сгруппировал в тематические серии. Такая группировка приведена на каждой странице перед перечнями заданий по алгебре, геометрии и химии (т. е. кроме физики – там задач пока совсем мало), причём внутри каждой серии я постарался расположить упражнения в порядке нарастания сложности. Некоторые задачи указаны по нескольку раз, так как по своему смыслу могут быть отнесены к разным сериям.