

Модуль. Производная и интеграл

Результаты, представленные ниже, получены мной, когда я ещё учился в школе, в 11-м классе (1998-1999 гг.). Мне тогда показалось странным, что в учебниках математики (по крайней мере, в тех, которые мне доводилось видеть) такая функция как модуль $y(x)=|x|$ не совсем заслужено обделена вниманием в том смысле, что для неё не указаны её производная и первообразная. Тогда мной и была предпринята попытка исправить ситуацию.

Производная модуля

Пусть $y(x)=|x|$. Покажем двумя способами, что при $x \neq 0$ (в точке $x=0$ функция модуля недифференцируема)

$$(|x|)' = \frac{x}{|x|} \quad (1)$$

Первый способ:

Рассмотрим функцию $y=|x|$ ($x \neq 0$). Дадим аргументу x приращение Δx и согласно определению производной найдём предел отношения приращения функции $|x+\Delta x| - |x|$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$, воспользовавшись известным тождеством $(|x|)^2 = x^2$:

$$\begin{aligned} (|x|)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(|x+\Delta x| - |x|) \cdot (|x+\Delta x| + |x|)}{\Delta x \cdot (|x+\Delta x| + |x|)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(|x+\Delta x|)^2 - (|x|)^2}{\Delta x \cdot (|x+\Delta x| + |x|)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x \cdot (|x+\Delta x| + |x|)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x \cdot (|x+\Delta x| + |x|)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + \Delta x}{|x+\Delta x| + |x|} = \frac{2x}{2|x|} = \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

Второй способ:

Для вычисления производной модуля воспользуемся тождеством

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Функцию $y(x)=\sqrt{x^2}$ можно рассматривать как сложную функцию $f(g(x))$ ($f=\sqrt{}$, $g=x^2$). Исходя из правила вычисления производной сложной функции можно записать:

$$(|x|)' = \left(\sqrt{x^2} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}$$

Интеграл модуля

Для вычисления первообразной функции $y=|x|$ докажем сначала справедливость следующего равенства при $x \neq 0$:

$$|x| = \frac{x^2}{|x|} \quad (2)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} |x| = \frac{x^2}{|x|} &\Leftrightarrow \frac{x^2}{|x|} - |x| = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - (|x|)^2}{|x|} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - x^2}{|x|} = 0 \Leftrightarrow \frac{0}{|x|} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

q.e.d.

Далее, согласно формуле для интегрирования по частям ($u=u(x)$, $v=v(x)$):

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du \quad (*)$$

Пусть $u=|x|$, $v=x$, тогда используя (1) и (2) получим:

$$\begin{aligned} \int |x| dx &= |x| \cdot x - \int x \cdot d(|x|) = |x| \cdot x - \int x \cdot \frac{x}{|x|} dx = \\ &= |x| \cdot x - \int \frac{x^2}{|x|} dx = |x| \cdot x - \int |x| dx \end{aligned} \quad (3)$$

Первообразная функции (модуля) оказалась выраженной через свою же первообразную. Так как две первообразные функции отличаются друг от друга на произвольную постоянную C , то (3) следует записать в таком виде:

$$\int |x| dx = |x| \cdot x - \int |x| dx + C$$

Откуда

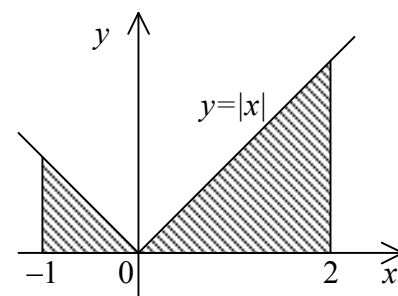
$$2 \int |x| dx = |x| \cdot x + C$$

И окончательно (C – произвольная постоянная):

$$\int |x| dx = \frac{|x| \cdot x}{2} + C \quad (4)$$

В качестве варианта практического применения формулы (4) вычислим через интеграл площадь S заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке. Нетрудно видеть, что из геометрических соображений она должна составлять $S = 2,5$. Согласно (4):

$$S = \int_{-1}^2 |x| dx = \frac{|x| \cdot x}{2} \Big|_{-1}^2 = \frac{|2| \cdot 2}{2} - \frac{|-1| \cdot (-1)}{2} = 2,5$$



Можно, конечно, сказать, что модуль не настолько часто используемая функция, чтобы уделять ей такое внимание, но в том же 11-м классе я обратил внимание на то, что интеграл логарифмической функции тоже почему-то не указан в таблице первообразных, хотя чтобы взять интеграл от логарифма достаточно воспользоваться формулой интегрирования по частям. Пусть, в соответствии с (*), $u=\ln x$, $v=x$, тогда

$$\begin{aligned} \int \ln x \cdot dx &= \ln x \cdot x - \int x \cdot d(\ln x) = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \ln x \cdot x - \int 1 \cdot dx = \ln x \cdot x - x + C = x \cdot (\ln x - 1) + C = \\ &= x \cdot (\ln x - \ln e) + C = x \cdot \ln \frac{x}{e} + C \end{aligned}$$

В общем случае:

$$\begin{aligned} \int \log_a x \cdot dx &= \frac{1}{\ln a} \int \ln x \cdot dx = \\ &= \frac{1}{\ln a} \cdot x \cdot \ln \frac{x}{e} + C = x \cdot \log_a \frac{x}{e} + C \end{aligned}$$

Окончательно можно записать, что (C – произвольная постоянная, $a > 0$, $a \neq 1$):

$$\int \log_a x \cdot dx = x \cdot \log_a \frac{x}{e} + C$$