Рекуррентная формула для вычисления корня *k*-ой степени из числа *C*

Ещё в школе я, как и все мы, познакомился с иррациональными числами. Для вычисления их приближённых значений и выполнения операций над ними я уже вовсю пользовался электронным микрокалькулятором. От своей учительницы по математике, Беловой Светланы Владимировны, я узнал, что раньше ученики использовали таблицы Брадиса и логарифмические линейки. Современные школьники как о первых, так и о вторых имеют уже крайне смутные представления. Мне же тогда не давал покоя вопрос: а как же именно калькулятор вычисляет значения квадратных корней, тригонометрических функций и логарифмов?

Поступив в университет, из курса высшей математики я узнал о том, что, например, функция синуса может быть представлена в виде степенного ряда и таким образом можно вычислить её приближённое значение для любого числа – тогда-то мне и стал понятен алгоритм работы калькулятора при вычислении синуса. Как-то в руки мне попал старенький школьный учебник по алгебре. Листая его, я вдруг обнаружил в нём формулу, с помощью которой можно методом последовательных приближений вычислять значения квадратных корней. Для меня это было довольно неожиданно – ведь в тех учебниках по алгебре, по которым я учился, этой формулы не было и в помине, то есть сейчас этот материал просто исключён из школьной программы, что на мой взгляд сделано совершенно напрасно.

Меня заинтриговала эта формула из старого учебника, причём настолько, что вооружившись знаниями по математике, полученными в университете, я, будучи уже студентом второго курса, не только вывел её, но и получил более общую формулу, позволяющую вычислять значение корня степени k из числа C.

Пусть $\{x_n\}$ – последовательность приближённых значений корня k-ой степени из числа C ($k \in N, C \geq 0$), причём $\{x_n\}$ имеет предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[k]{C}$$

Другими словами x_0, x_1, x_2, ... – всё более и более точные (хотя и приближённые) значения числа $\sqrt[k]{C}$. Зная способ вычисления членов последовательности $\{x_n\}$ мы будем знать способ вычисления приближённого значения числа $\sqrt[k]{C}$.

Последовательность $\{x_n\}$ может быть задана рекуррентной формулой:

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{C}{x_n^{k-1}}\right) \qquad (1)$$

Как получается эта формула, можно показать двумя способами.

I-й способ

Пусть нам известно приближённое значение $\sqrt[k]{C}$ и пусть оно равно x_n: $x_n \approx \sqrt[k]{C}$ и пусть мы хотим получить более точное значение $\sqrt[k]{C}$, нежели x_n. Приближённое равенство $x_n \approx \sqrt[k]{C}$ можно сделать точным:

$$x_n + a = \sqrt[k]{C} \qquad (2)$$

Точное значение a мы вычислить не можем, так как мы не знаем точного значения $\sqrt[k]{C}$, но если мы сможем определить приближённое значение числа a (обозначим его как a^*), то x_{n+1} можно будет представить в виде

$$x_{n+1} = x_n + a^* \qquad (3)$$

Возведём обе части равенства (2) в степень n:

$$(x_n + a)^k = C$$

По формуле бинома Ньютона:

$$C = x_n^k + k \cdot x_n^{k-1} \cdot a + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot x_n^{k-2} \cdot a^2 + ... + a^k \qquad (4)$$

Будем считать, что по абсолютной величине число a достаточно мало, следовательно, для определения приближённого значения a всеми слагаемыми, содержащими a в степени выше первой в выражении (4) можно пренебречь. Тогда

$$C \approx x_n^k + k \cdot x_n^{n-1} \cdot a$$

Число a^* можно выбрать так, чтобы

$$C = x_n^k + k \cdot x_n^{n-1} \cdot a^*$$

Отсюда:

$$a^* = \frac{C - x_n^k}{k \cdot x_n^{k-1}} \qquad (5)$$

Подставляем (5) в (3) и после преобразования получаем формулу (1):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{C - x_n^k}{k \cdot x_n^{k-1}} = \frac{k \cdot x_n^k + C - x_n^k}{k \cdot x_n^{k-1}} =$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \frac{(k-1)x_n^k + C}{x_n^{k-1}} = \frac{1}{k} \cdot \left((k-1)x_n + \frac{C}{x_n^{k-1}} \right)$$

II-й способ

Рассмотрим функцию $y(x)=x^k - C$ ($k \in N, C \geq 0$). Она при $x>0$ имеет значение, равное нулю в точке $x=\sqrt[k]{C}$. Вычислив приближённое значение x, при котором функция $y(x)$ обращается в ноль, можно тем самым вычислить приближённое значение $\sqrt[k]{C}$.

Отметим, что

$$y'(x) = (x^k - C)' = k \cdot x^{k-1}$$

Приближённое значение $\sqrt[k]{C}$ можно вычислять с помощью метода касательных. Если x_n – приближённое значение корня функции $y(x)$, то более точное значение x_{n+1} можно вычислить с помощью указанного метода, получив при этом формулу (1):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{y(x_n)}{y'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^k - C}{k \cdot x_n^{k-1}} = \frac{1}{k} \cdot \left((k-1)x_n + \frac{C}{x_n^{k-1}} \right)$$

Пример

Вычислим приближённое значение $\sqrt{3}$ с точностью до четвёртого знака после запятой. Для вычисления квадратного корня формула (1) примет вид:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{C}{x_n} \right)$$

Пусть x_0=1, тогда

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{3}{1}\right) = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{3}{2}\right) = 1{,}75$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(1{,}75 + \frac{3}{1{,}75}\right) = 1{,}7321428... \approx 1{,}73214$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(1{,}73214 + \frac{3}{1{,}73214}\right) = 1{,}7320508... \approx 1{,}73205$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \cdot \left(1{,}73205 + \frac{3}{1{,}73205}\right) = 1{,}7320508... \approx 1{,}73205$$

Округляя x_5 до четвёртого знака после запятой получаем, что $\sqrt{3} \approx 1{,}7321$.