

ШКОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Подборка авторских задач по ряду учебных дисциплин. Решения предлагаемых заданий опубликованы на сайте (shurichimik.narod.ru) и на дзен-канале (https://dzen.ru/shuric_himik) автора.

Алгебра

A-1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$x^2 + y^2 = |2x| + |2y| - 1$$

A-2. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} |y| \geq x^2 \\ |x| \geq y^2 \end{cases}$$

A-3. Дана система неравенств:

$$\begin{cases} |y| \geq x^2 - 1 \\ |x| \geq y^2 - 1 \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют данной системе.

б) Определите у получившейся фигуры координаты точек, наиболее удалённых от начала координат.

A-4. Построить график функции:

$$y = \frac{1}{2} \cdot (|x^2 - 1| - (x^2 - 1))$$

A-5. Построить график функции:

$$y = ||x| - 1| - (|x| - 1)$$

A-6. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x^2 - 6x + y^2 \geq 7 \end{cases}$$

A-7. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют следующему набору условий:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 8 \cdot (|x| + |y|) \\ 20|x| + \sqrt{(y+20) \cdot |y+20|} \leq 20 \end{cases}$$

A-8. Решите уравнение:

$$3x|x| - 28 = 6\sqrt{3}$$

A-9. Решите уравнение:

$$\cos^4 x - 1111 \cdot \cos^3 x - 112110 \cdot \sin^2 x - 1111000 \cdot \cos x + 1112110 = 0$$

A-10. Построить график уравнения: $\sin x = \sin y$

A-11. Построить график уравнения: $|y| = \sin x$

A-12. Решите уравнение: $e^{4x} + \sqrt{e} = (\sqrt{e} + 1) \cdot e^{2x}$

A-13. Найти значение выражения, если n – натуральное, а m – целое:

$$\sqrt{n+m \cdot \sqrt{n+m \cdot \sqrt{n+\dots}}}$$

A-14. Разложить на множители: $m^5 + m^4n + m^3n^2 + m^2n^3 + mn^4 + n^5$

A-15. Найти все корни уравнения: $z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0$

A-16. Изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют условию: $y^2 = x^2$

A-17. Дробная часть числа x обозначается как $\{x\}$. Данная функция определена на всём множестве действительных чисел, область её значений – полуинтервал $[0; 1)$, кроме того, она является периодической функцией с периодом, равным 1. С учётом этих данных построить график функции

$$y = \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right|$$

A-18. Построить график функции $y = \left| \{x\}^2 - \frac{1}{2} \right|$

A-19. Построить график функции $y = \left| \sqrt{\{x\}} - \frac{1}{2} \right|$

A-20. Построить график функции $y = \left| e^{\{x\}} - \frac{(e+1)}{2} \right|$

A-21. Построить график функции $y = \left| \sqrt{1 - \{x\}^2} - \frac{1}{2} \right|$

A-22. Построить график функции $y = \sqrt{\{x\} \cdot (1 - \{x\})}$

A-23. Построить график уравнения: $\{x\} = \{x\}^2 + y^2$

A-24. Построить график уравнения: $y^2 = \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right)^2$

A-25. Построить график уравнения: $y^2 = \sin^4 x$

Геометрия

Г-1. Доказать, что сумма синусов углов треугольника равна отношению периметра треугольника к диаметру описанной вокруг него окружности.

Г-2. Дано два равносторонних треугольника. При помощи циркуля и линейки построить третий равносторонний треугольник, площадь которого равна сумме площадей первых двух.

Г-3. Тетраэдр, у которого все рёбра имеют одинаковую длину, называется правильным, и он обладает следующими свойствами: а) все четыре грани тетраэдра являются равносторонними треугольниками, равными между собой; б) любая его высота пересекает грань в точке, равноудалённой от каждого из рёбер этой грани; в) внутри тетраэдра есть точка, которая равноудалена от его вершин и является точкой пересечения высот тетраэдра.

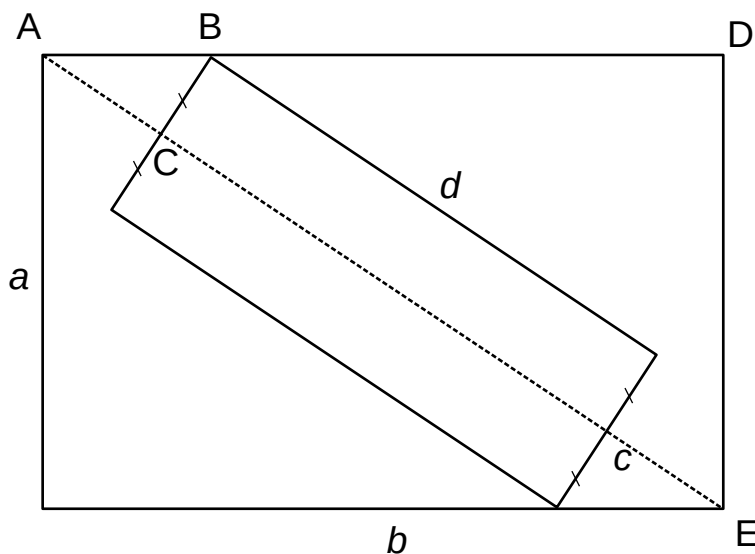
Найти косинус угла, вершина которого находится в точке пересечения высот тетраэдра, а стороны проходят через любые две его вершины.

Г-4. Попавший ночью в шторм парусник затонул. Из экипажа выжить удалось лишь одному человеку, который остался на поверхности воды и держится за спасательный круг. На рассвете небо полностью расчистилось от облаков и наступил полный штиль. В 15 км от

выжившего оказался ещё один парусный корабль, на мачте которого в «вороньем гнезде» дежурит очень зоркий матрос и с высоты 15 м над водой осматривает море окрест. Сможет ли он увидеть выжившего в кораблекрушении, чтобы сообщить капитану судна о человеке за бортом?

При решении задачи рекомендуется использовать инженерный микрокалькулятор; радиус Земли считать равным 6370 км.

Г-5. Внутри прямоугольника со сторонами a и b расположен ещё один прямоугольник со сторонами c и d так, как показано на рисунке – одна из диагоналей внешнего проходит через середины сторон внутреннего и две вершины внутреннего лежат на сторонах внешнего. Считая величины a , b и c известными, найти значение d .



Г-6. Даны два отрезка с длинами a и $a\sqrt{n}$ (a – неотрицательное действительное, n – натуральное). При помощи циркуля и линейки построить отрезок с длиной $a\sqrt{n+1}$.

Г-7. Даны два отрезка с длинами a и $a\sqrt{n}$ (a – неотрицательное действительное, n – натуральное, равное или большее двух). При помощи циркуля и линейки построить отрезок с длиной $a\sqrt{n-1}$.

Г-8. Дана сфера с радиусом R . Доказать, что: а) первая производная объёма сферы по радиусу равна её площади; б) вторая производная объёма сферы по радиусу равна учетверённой длине её большой окружности.

Г-9. Длина стороны правильного многоугольника равна a . Найти производную его площади по стороне.

Г-10. Вокруг правильного многоугольника с числом сторон n описана окружность радиусом R . Найти предел отношения производной площади многоугольника S по радиусу R описанной окружности к периметру P этого многоугольника при бесконечном увеличении n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{dS}{dR} \cdot \frac{1}{P} \right)$$

Г-11. Чему равно отношение производной объёма куба по стороне к площади его поверхности?

Г-12. Дан правильный тетраэдр с ребром, равным a . Найти отношение производной его объёма по длине ребра к площади поверхности.

Г-13. Доказать, что сумма частных производных площади прямоугольника по его сторонам равна полупериметру этой фигуры.

Г-14. Для правильного октаэдра с длиной ребра a найти отношение производной его объёма по ребру к площади поверхности.

Г-15. На плоскости дано два ненулевых вектора с координатами $(c; c^2)$ и $(c; c^3)$. Найти все действительные значения c , при которых векторы будут взаимно перпендикулярны.

Г-16. В трёхмерном пространстве заданы два ненулевых вектора с координатами $(-2c; c; c)$ и $(c; c^2; c^3)$. Найти все действительные значения c , при которых векторы будут взаимно перпендикулярны.

Г-17. На плоскости дано два ненулевых вектора с координатами $(c; c)$ и $(c; c^2)$. Найти все действительные значения c , при которых угол между векторами будет равен 60° .

Г-18. Доказать, что сумма частных производных объёма прямоугольного параллелепипеда по сторонам равна половине площади его поверхности.

Физика

Ф-1. В лаборатории планируется проведение следующей серии экспериментов на ускорителе по изучению реакций слияния атомных ядер. Предполагается, что при бомбардировке мишени, состоящей из атомов элемента Э_1 , разогнанными ядрами элемента Э_2 будет получен изотоп элемента Э_3 . Если же этот изотоп снова использовать в качестве мишени для обстрела ядрами элемента Э_2 , то может образоваться изотоп европия, а если элемент Э_3 бомбардировать ядрами элемента Э_1 , то получится изотоп диспрозия. Определить, что это за элементы $\text{Э}_1, \text{Э}_2, \text{Э}_3$.

Ф-2. Планеты Земля, Венера и Юпитер, двигаясь по своим орбитам вокруг Солнца, оказались на одной линии, расположившись в следующем порядке: Солнце – Венера – Земля – Юпитер.

Какая из планет – Венера или Юпитер – воздействует на Землю с большей силой тяготения и во сколько раз? Радиусы орбит Венеры и Юпитера составляют соответственно 0,723 и 5,203 радиусов орбиты Земли, а массы равны 0,82 и 318 масс Земли.

Ф-3. По некоторой траектории движется материальная точка. Доказать, что производная её кинетической энергии по скорости равна её импульсу.

Ф-4. Когда астрономы определили массы и размеры Земли и Луны, встал вопрос о том, почему средние плотности планеты и спутника так различаются – у Луны эта величина оказалась заметно меньшей. Одной из попыток объяснения данного факта была гипотеза (ныне отвергнутая научным сообществом из-за своей несостоятельности), что Луна полая внутри, хотя и состоит из такого же вещества, что и Земля.

Исходя из фантастического предположения, что внутри Луны действительно есть одна большая сферическая и совершенно пустая полость и считая среднюю плотность вещества Луны равной средней плотности Земли, найдите радиус этой гипотетической полости (в % от лунного). Радиус Луны в 3,67 раз меньше земного, а её масса – в 81,3 раза меньше массы планеты.

Химия

Х-1. Сожгли 14,2 г насыщенного углеводорода, продукты реакции полностью поглотили при пропускании их через избыток баритовой воды, при этом образовалось 197 г осадка. Определить брутто-формулу сожжённого углеводорода.

Х-2. В растворе, содержащем смесь трёх аминокислот А, В и С вырастили культуру бактерий. В продуктах их жизнедеятельности выявлено наличие трипептида А-В-С с молекулярной массой 259, трипептида А-А-С с молекулярной массой 203 и дипептида В-С, молекулярная масса которого составляет 202. Зная, что помимо аминогруппы и карбоксильной

группы молекулы А, В и С содержат углеводородный остаток без циклов и кратных связей, установить брутто-формулы этих аминокислот.

X-3. Монофторпроизводное углеводорода имеет плотность по водороду 31. Что это за вещество и сколько у него изомеров?

X-4. Дихлорпроизводное алкана имеет плотность паров по водороду 63,5. Какова формула вещества?

X-5. Фторпроизводное уксусной кислоты имеет плотность паров по воздуху 3,93. Сколько атомов фтора содержит молекула такого вещества?

X-6. На заводе выплавляли 8,7 т нержавеющей стали с массовой долей хрома 12%. Для плавки использовали взятый со склада феррохром – сплав железа с хромом, в котором массовая доля последнего составляла 58%. Сколько килограммов феррохрома было израсходовано?

X-7. Вычислить длину ребра куба, равновеликого по объёму всему содержащемуся в земной атмосфере ксенону.

При решении задачи использовать следующие справочные данные:

- объёмная доля ксенона в воздухе $\varphi(\text{Xe}) = 8,6 \cdot 10^{-6}\%$;
- масса атмосферы Земли $m = 5,16 \cdot 10^{18}$ кг;
- плотность воздуха $\rho = 1,29$ кг/м³ (принять данную величину одинаковой на любой высоте от поверхности Земли).

X-8. В колбу, содержащую 125 г воды, медленно по каплям и при непрерывном перемешивании добавили 24,0 г олеума, массовая концентрация серного ангидрида в котором составляет 3,5%. Какова массовая доля (в %) серной кислоты в получившемся растворе?

X-9. Было два водных раствора сульфата меди (II). Массовая доля CuSO_4 в первом составляла 1%, во втором – 4%. При их смешивании получили 240 г третьего раствора, после выдерживания в котором железной пластинки её масса по окончании реакции увеличилась на 0,42 г. Каковы массы первого и второго растворов, взятые для приготовления третьего?

X-10. Какое максимальное количество творожной массы с жирностью 5% можно приготовить из 500 г обезжиренного творога и 500 г творога с жирностью 9% ?

X-11. Дано два водных раствора глюкозы. В первом массовая доля растворённого вещества составляет 3%, а во втором – 10%. Сколько этих растворов нужно взять, чтобы при их смешивании получить 196 г раствора с концентрацией глюкозы 8%?

X-12. Какие объёмы 0,13 М и 0,075 М водных растворов KCN нужно смешать, чтобы получить 4,4 л децимолярного раствора цианида калия?

X-13. Средняя молярная масса газовой смеси, состоящей из гелия и гексафторида серы, равна молярной массе силана (при н.у.). Какова объёмная доля (в %) гелия в смеси?

X-14. В бутылку налили 68 г водного раствора пероксида водорода с массовой концентрацией 30%, добавили туда же щепотку пиролюзита, после чего бутылку сразу герметично закупорили. Температура всего её содержимого по окончании реакции поднялась с 20 °С до 45 °С. Свободный объём бутылки составляет 1,5 л. Каким стало давление (в атм.) газов в бутылке, если до её закупоривания оно составляло 1 атм.?

При решении задачи пренебречь парообразованием воды, изменениями величины свободного объёма и растворимостей газов, поведение которых также считать идеальным.

X-15. Взяли 26,12 г этилового эфира одноосновной карбоновой кислоты и полностью омылили его гидроксидом натрия. Из продуктов реакции было выделено 24,58 г натриевой соли этой кислоты. Определить эфир, использовавшийся для проведения реакции.

Тематические серии задач

Алгебра

- решение уравнений: А-8, А-12, А-9, А-15
- построение графика функции: А-4, А-5
- построение графика функции: А-17, А-18, А-19, А-20, А-21, А-22
- построение графика уравнения: А-16, А-11, А-25, А-23, А-24
- построение графика уравнения: А-10, А-1
- построение множества точек, координаты которых удовлетворяют набору условий: А-6, А-2, А-3, А-7
- разные задачи: А-13, А-14

Геометрия

- задачи на построение: Г-2, Г-6, Г-7
- соотношение между длиной и производной площади: Г-13, Г-8, Г-9, Г-10, Г-13
- соотношение между площадью и производной объёма: Г-8, Г-11, Г-14, Г-18
- сумма частных производных: Г-13, Г-18
- нахождение векторов, угол между которыми задан: Г-15, Г-16, Г-17
- разные задачи: Г-1, Г-4, Г-5, Г-3

Физика

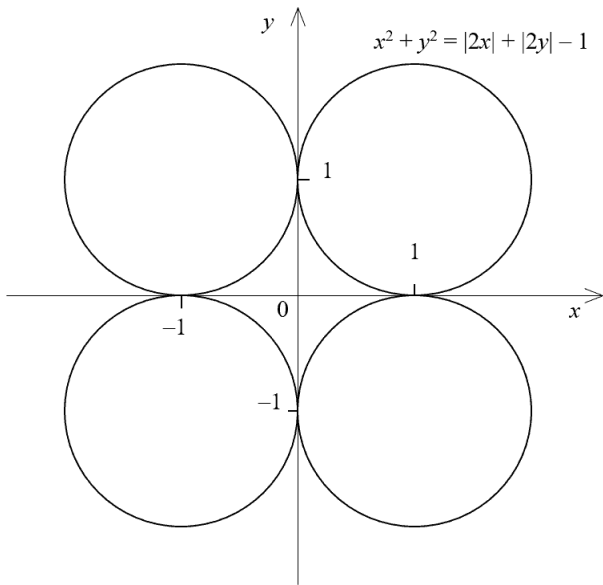
- астрономия: Ф-2, Ф-4
- разные задачи; Ф-1. Ф-3

Химия

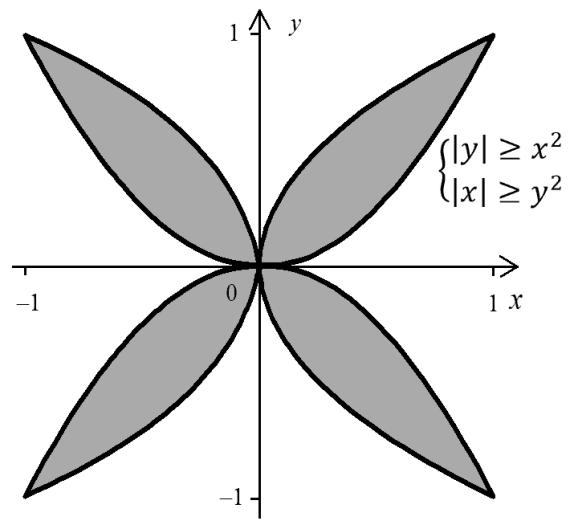
- нахождение формулы вещества по данным о продуктах его реакции: Х-15, Х-1, Х-2
- определение вещества с учётом данных о плотности его паров: Х-4, Х-5, Х-3
- задачи на правило креста: Х-11, Х-10, Х-12, Х-9
- разные задачи: Х-6, Х-13, Х-8, Х-7, Х-14

Ответы

A-1.

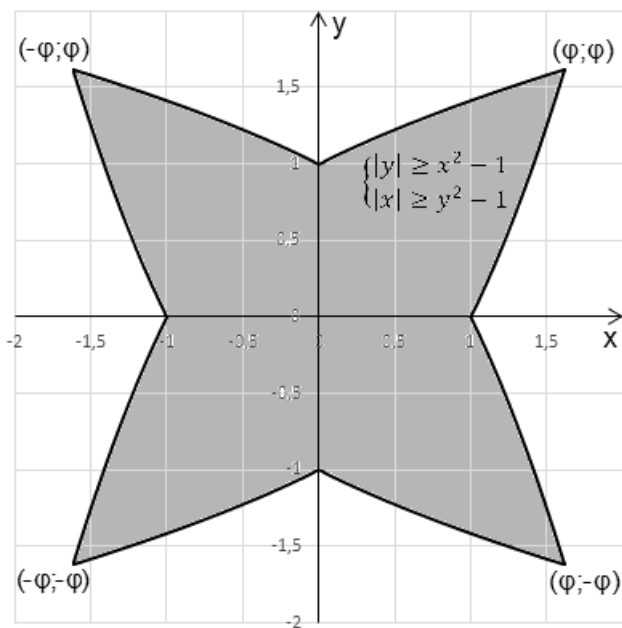


A-2.



A-3.

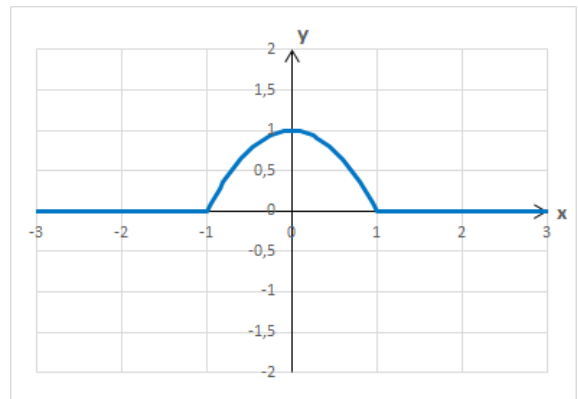
a)



б) $(\varphi; \varphi), (-\varphi; \varphi), (-\varphi; -\varphi), (\varphi; -\varphi)$, где $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

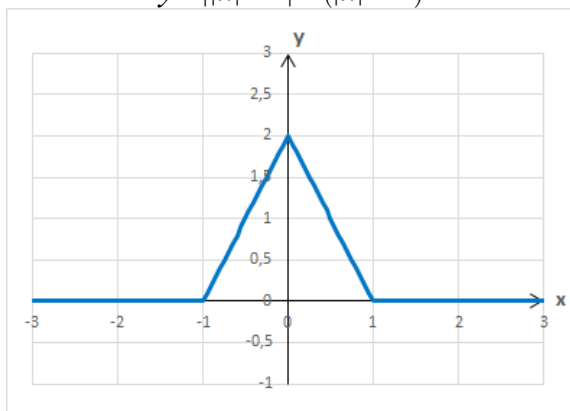
A-4.

$$y = \frac{1}{2} \cdot (|x^2 - 1| - (x^2 - 1))$$

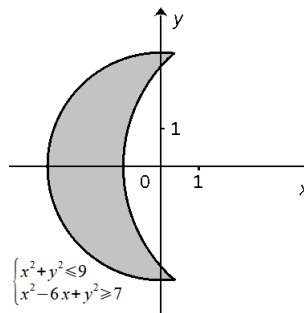


A-5.

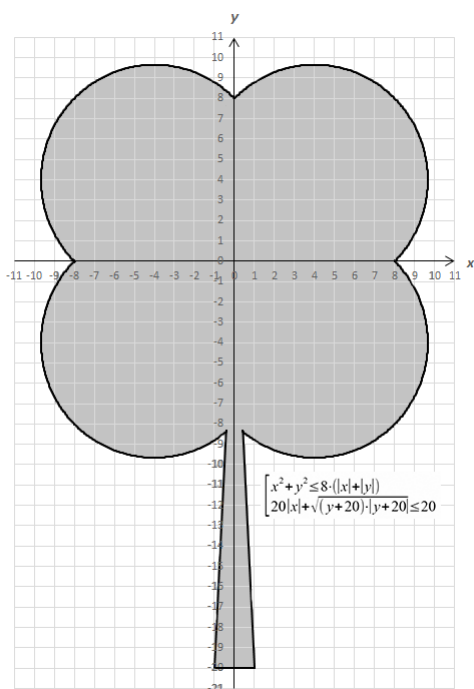
$$y = ||x| - 1| - (|x| - 1)$$



A-6.

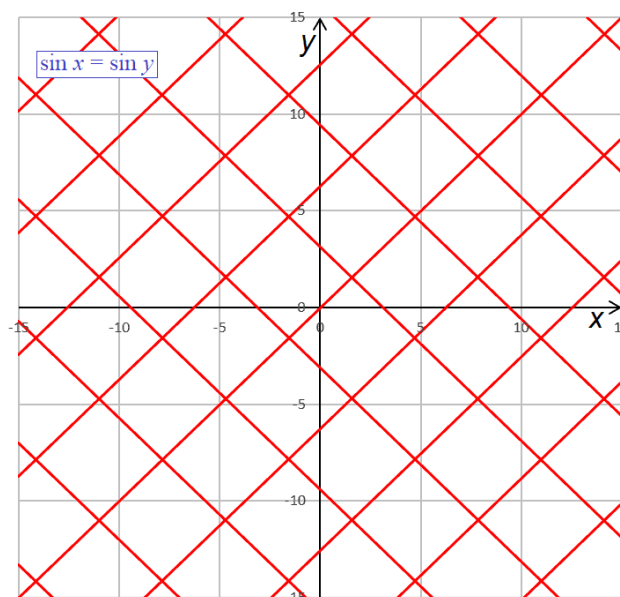


A-7.

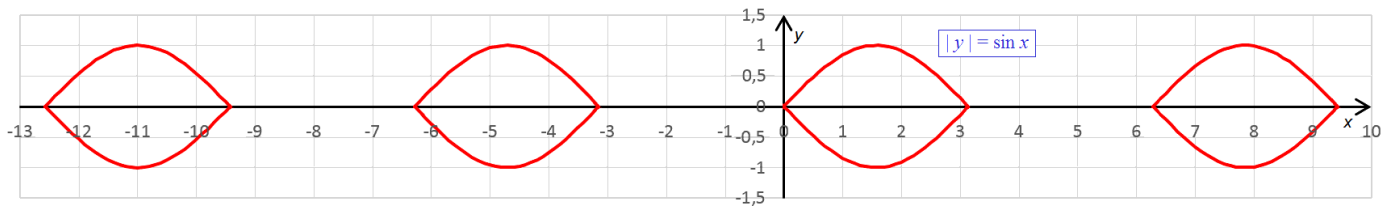


A-8. $x = 3 + \frac{\sqrt{3}}{3}$; A-9. $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

A-10.

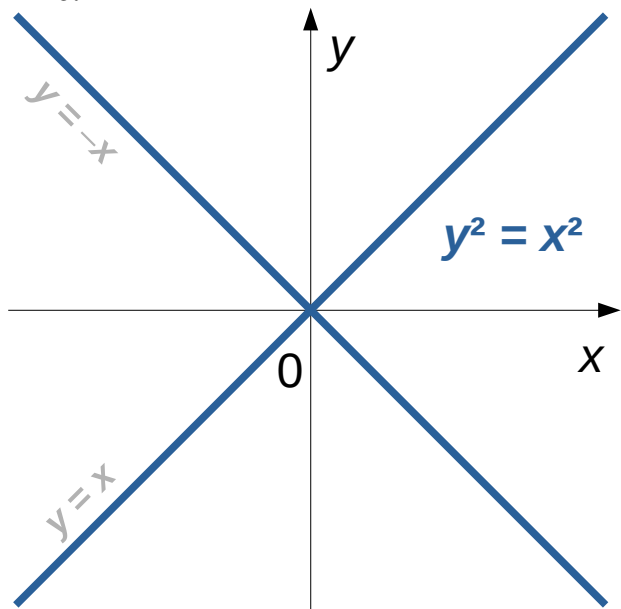


A-11.

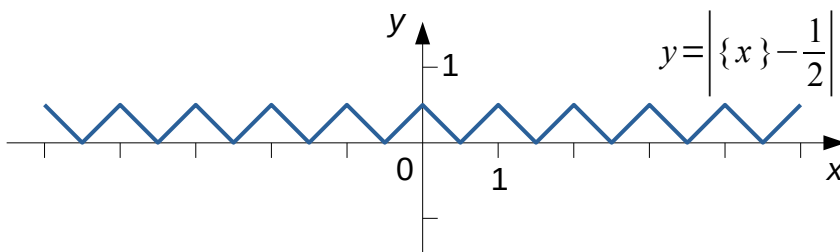


A-12. $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 0$; A-13. $\frac{m + \sqrt{m^2 + 4n}}{2}$; A-14. $(m + n)(m^2 + mn + n^2)(m^2 - mn + n^2)$; A-15 $z_1 = -2, z_{2,3,4,5} = \pm 1 \pm i \cdot \sqrt{3}$;

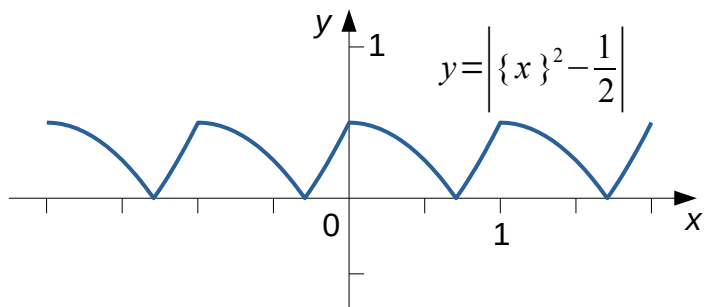
A-16.



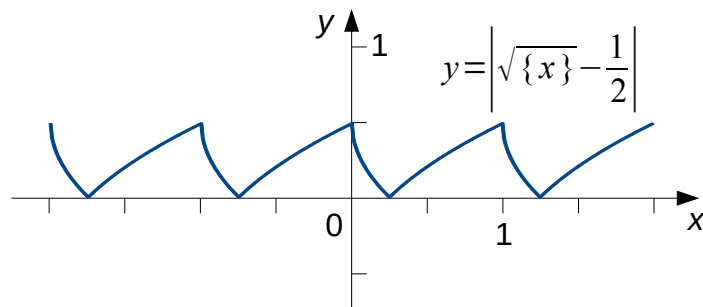
A-17.



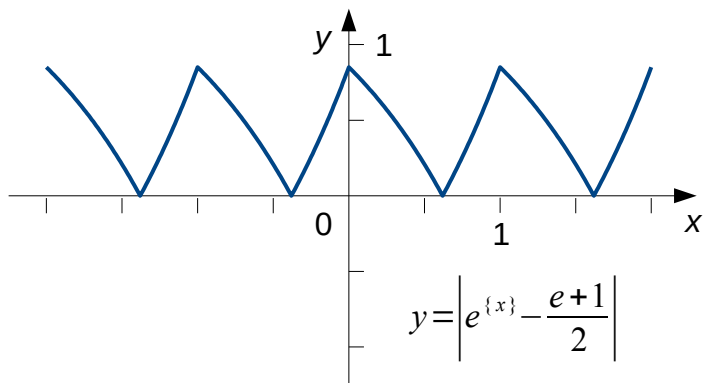
A-18.



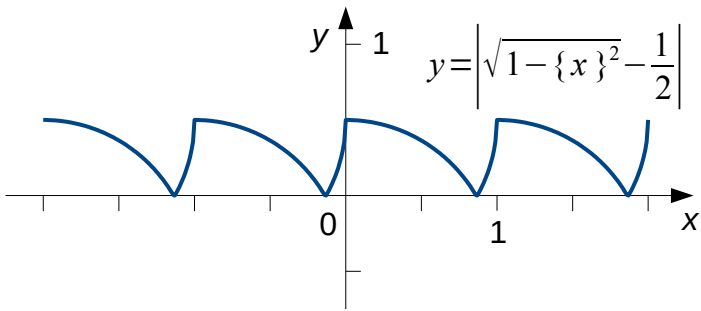
A-19.



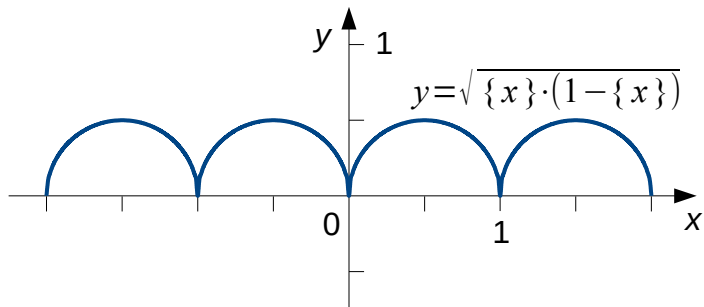
A-20.



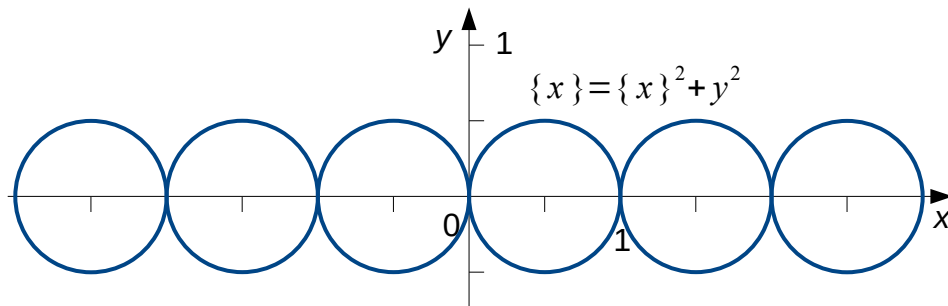
A-21.



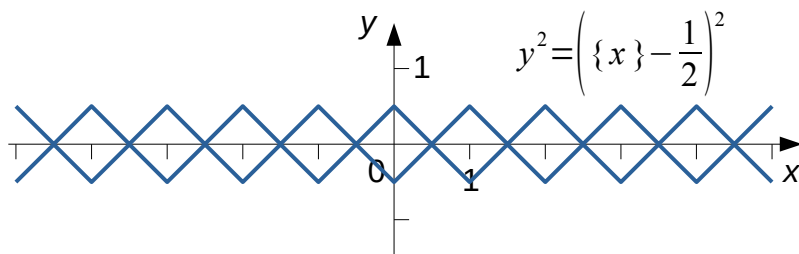
A-22.



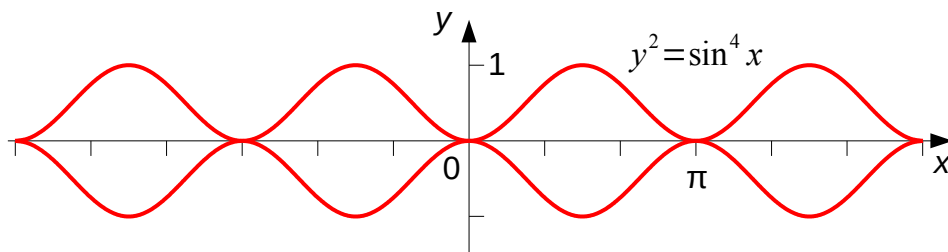
A-23.



A-24.



A-25.



Г-3. $-\frac{1}{3}$; Г-4. Матрос-наблюдатель не сможет увидеть выжившего в кораблекрушении;

Г-5. $d = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{bc}{a}$; Г-9. $\frac{dS}{da} = p \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$; Г-10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{dS}{dR} \cdot \frac{1}{P} \right) = 1$; Г-11. $\frac{1}{2}$; Г-12. $\frac{\sqrt{6}}{12}$; Г-14. $\frac{\sqrt{6}}{6}$;

Г-15. $c = -1$; Г-16. $c_1 = -2, c_2 = 1$; Г-17. $c = \sqrt{3} - 2$.

Ф-1. Э₁ – ванадий, Э₂ – кальций, Э₃ – технеций; **Ф-2.** Сила тяготения, действующая на Землю со стороны Юпитера, в 1,7 раз больше, чем сила притяжения между Землёй и Венерой; **Ф-4.** 73,2%.

Х-1. C₁₀H₂₂; **Х-2.** “А” – C₂H₅O₂N, “В” – C₆H₁₃O₂N, “С” – C₃H₇O₂N; **Х-3.** Фторпропан (2 изомера); **Х-4.** C₄H₈Cl₂; **Х-5.** 3; **Х-6.** 1800 кг; **Х-7.** 7 км; **Х-8.** 16,2%; **Х-9.** Масса первого (1%-го) раствора 40 г, масса второго (4%-го) раствора 200 г; **Х-10.** 900 г; **Х-11.** Масса первого (3%-го) раствора 56 г, масса второго (10%-го) раствора 140 г; **Х-12.** Потребуется 2 л 0,13 М и 2,4 л 0,075 М раствора; **Х-13.** 80,3%; **Х-14.** 6,3 атм.; **Х-15.** Этилпропионат.