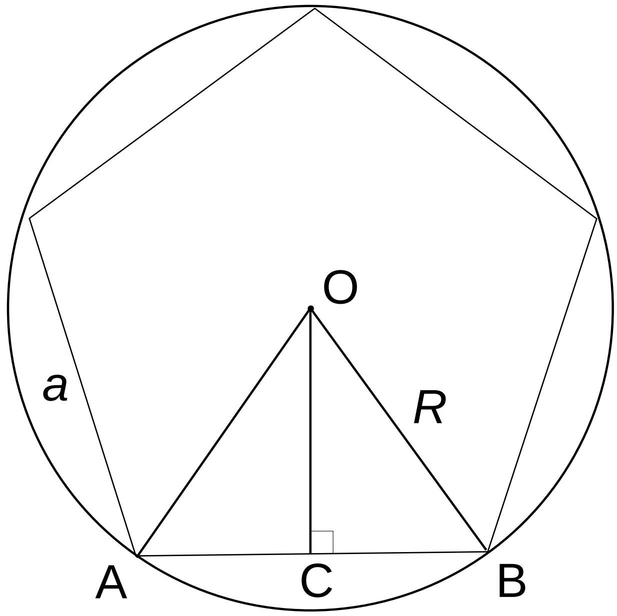
Школьные задачи / Геометрия / Г-9

Длина стороны правильного многоугольника равна a. Найти производную его площади по стороне.

Р е ш е н и е



Выразим через a площадь S правильного многоугольника с числом сторон n. Для этого сначала опишем вокруг него окружность, а затем разделим его на n треугольников, таких, чтобы одна вершина каждого треугольника являлась центром описанной окружности, а две другие были вершинами многоугольника, принадлежащими одной его стороне. Все полученные треугольники будут равны друг другу по трём сторонам (две из них – радиусы описанной окружности, а третья – это сторона самого многоугольника).

Найдём площадь одного из таких треугольников – рассмотрим △AOB (см. рисунок). Он является равнобедренным, так как его стороны AO и OB – радиусы описанной окружности:

$$AO = OB = R$$

Опустим из вершины O на сторону AB высоту OC, которая будет ещё и биссектрисой ∠AOB и медианой для AB (как высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника). Длину OC можно выразить через AC и котангенс ∠AOC:

$$OC = AC \cdot \mathrm{ctg}(\angle AOC)$$

В рассматриваемом треугольнике ∠AOB равен 360°/n или в радианной мере

$$\angle AOB = \frac{2\pi}{n}$$

Так как OC – биссектриса ∠AOB, то ∠AOC = ∠AOB / 2, то есть

$$\angle AOC = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{n}$$

С учётом того, что AC = CB = AB / 2 = a/2 получаем что

$$OC = \frac{a}{2} \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n}$$

Теперь можно найти площадь треугольника S(△AOB) через его высоту и основание:

$$S(\triangle AOB) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n} = \frac{a^2}{4} \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n}$$

Поскольку $S = n \cdot S$(△AOB), то получаем следующую формулу для площади правильного n-угольника:

$$S = n \cdot S(\triangle AOB) = a^2 \cdot \frac{n}{4} \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n}$$

Если площадь правильного многоугольника рассматривать как функцию длины его стороны: $S = S(a)$, то искомая производная S_a' (в других обозначениях – $\frac{dS}{da}$) будет равна:

$$\frac{dS}{da} = \frac{d}{da}\left(a^2 \cdot \frac{n}{4} \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{4} \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n} \cdot \frac{d}{da}(a^2) = \frac{n}{4} \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n} \cdot 2a = \frac{an}{2} \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n}$$

(множитель $n/4 \cdot \mathrm{ctg}(\pi/n)$ не зависит от a, поэтому при дифференцировании выносится за знак производной как постоянный коэффициент).

Учитывая, что периметр многоугольника равен *an*, а, соответственно, полупериметр *p* есть *an*/2, то окончательно можно записать:

$$\frac{dS}{da} = p \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$$

О т в е т

$$\frac{dS}{da} = p \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$$

К о м м е н т а р и й

Полученный результат показывает, что производная площади правильного многоугольника по стороне прямо пропорциональна его полупериметру, а величина коэффициента пропорциональности $\operatorname{ctg}(\pi/n)$ зависит от числа сторон многоугольника. В частности, при $n = 4$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg} 45° = 1 \quad ,$$

поэтому для квадрата производная площади по длине стороны имеет наиболее простой вид:

$$\frac{dS}{da} = p \; .$$