Школьные задачи / Геометрия / Г-8

Дана сфера с радиусом R. Доказать, что: а) первая производная объёма сферы по радиусу равна её площади; б) вторая производная объёма сферы по радиусу равна учетверённой длине её большой окружности.

Р е ш е н и е

Объём сферы можно рассматривать как функцию её радиуса:

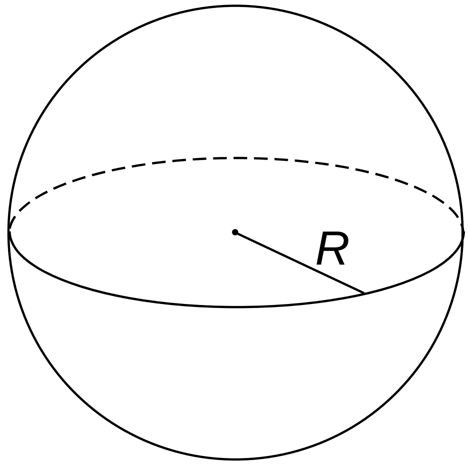
$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

а) Найдём производную такой функции, помня, что площадь сферы S равняется $4\pi R^2$:

$$(V)'_R=\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)'_R=\underbrace{\frac{4}{3}\pi\cdot(R^3)'_R}_{(1)}=\underbrace{\frac{4}{3}\pi\cdot 3R^2}_{(2)}=4\pi R^2=S$$

Здесь: (1) – выносим постоянные коэффициенты за знак производной; (2) – получившиеся в числителе и знаменателе тройки можно сократить.

б) Большой окружностью называется окружность, образуемая пересечением сферы проходящей через её центр плоскостью. Очевидно, что в этом случае радиус большой окружности равен радиусу самой сферы.



Найдём вторую производную объёма, продифференцировав первую, и помня, что длина окружности L равна $2\pi R$:

$$(V)''_R=\left((V)'_R\right)'_R=(4\pi R^2)'_R=4\pi(R^2)'_R=4\pi\cdot 2R=4\cdot 2\pi R=4L$$

Приведённые выше выкладки показывают: первая производная объёма сферы по радиусу действительно равна её площади, а вторая производная – четырём длинам большой окружности, что и требовалось доказать.

К о м м е н т а р и й

В вузовском курсе математики производные часто записываются как отношение дифференциалов функции и аргумента. С использованием таких обозначений в задаче требуется доказать следующие два равенства:

$$\frac{dV}{dR}=S,\quad \frac{d^2V}{dR^2}=4L$$

Примечательно, что по ходу решении становится легко заметно ещё одно любопытное соотношение – производная площади круга по радиусу равна длине ограничивающей его окружности:

$$\frac{dS_{\text{круга}}}{dR}=\frac{d(\pi R^2)}{dR}=\pi\frac{d(R^2)}{dR}=\pi\cdot 2R=L$$